## **פתרון תרגיל לעבודה עצמית 10**

### **שאלה 1**

הוכח ש $\lambda=1$ הוא ערך עצמי של המטריצה $A=\begin{pmatrix}1.5 & -0.5 & 0.5\\ 0.5 & -0.5 & 0.5\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

**פתרון**

נחשב את הערך העצמי

$\left|\begin{pmatrix}\lambda-1.5 & 0.5 & -0.5\\ -0.5 & \lambda+0.5 & -0.5\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{pmatrix}\right|=0$ ולכן $\lambda=1$ הוא ערך עצמי. (מכיוון שביקשו להוכיח אין צורך לפתור אלא רק להציב ולבדוק)

נחשב את הבסיס לווקטור העצמי כלומר נמצא בסיס למרחב הפתרונות של המערכת

$\begin{pmatrix}-0.5 & 0.5 & -0.5\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-0.5 & 0.5 & -0.5\\ -0.5 & 1.5 & -0.5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ ולכן הווקטור העצמי הוא $(1,0,-1)$

### **שאלה 2**

תהיי $B=\begin{pmatrix}-3 & 1 & -1\\ -7 & 5 & -1\\ -6 & 6 & -2\end{pmatrix}$. מצא:

א. הפולינום האופייני וערכים עצמיים של $B$.
ב. מצא את הווקטורים העצמיים.

**פתרון**

א.

הפולינום האופייני הוא

$$|\lambda I-B|=\left|\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3 & 1 & -1\\ -7 & 5 & -1\\ -6 & 6 & -2\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}\lambda+3 & -1 & 1\\ 7 & \lambda-5 & 1\\ 6 & -6 & \lambda+2\end{pmatrix}\right|=$$

$$=(\lambda+3)\left[(\lambda-5)(\lambda+2)+6\right]+7(\lambda+2)-6-42-6(\lambda-5)=$$

$$=(\lambda+3)\left[\lambda^2-3\lambda-4\right]+\lambda-4=(\lambda+3)(\lambda-4)(\lambda+1)+1(\lambda-4)=$$

$$=\left[(\lambda+3)(\lambda+1)+1\right](\lambda-4)=\left(\lambda^2+4\lambda+4\right)(\lambda-4)=(\lambda+2)^2(\lambda-4)$$

ואז הערכים העצמיים הם: $-2,4$.

ב.

נמצא את המרחב העצמי עבור $\lambda=4$.

ז"א יש למצוא את הפתרון הכללי של המערכת $Ax=0$ כאשר $A=\begin{pmatrix}7 & -1 & 1\\ 7 & -1 & 1\\ 6 & -6 & 6\end{pmatrix}$.

לאחר דירוג נקבל את המטריצה $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ ואז הפתרון הכללי הוא $\{t(0,1,1): t\in \mathbb{R}\}$.

נמצא בסיס למרחב העצמי עבור $\lambda=-2$.

ז"א יש למצוא פתרון כללי של המערכת $Ax=0$ כאשר $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 7 & -7 & 1\\ 6 & -6 & 0\end{pmatrix}$.

לאחר דירוג נקבל את המטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ ואז הפתרון הכללי הוא $\{t(1,1,0): t\in \mathbb{R}\}$.

**<u>שאלה 3</u>**

א. מצא את הערכים העצמיים והווקטורים העצמיים של המטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 2 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 2 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

ב. הראה $A$ ניתנת ללכסון ומצא מטריצה $P$ כך ש $P^{-1}AP$ היא אלכסונית.

ג. חשב את $A^{10}$.

**<u>פתרון</u>**

א.

נמצא את הערכים העצמיים

$$\left|\begin{pmatrix}\lambda-1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ -2 & 0 & \lambda+2 & 0\\ 0 & -2 & 0 & \lambda+2\end{pmatrix}\right|=0\Rightarrow\left|\begin{pmatrix}\lambda-1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda+2)(\lambda-1)+1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda+2)(\lambda-1)+1\end{pmatrix}\right|=0$$

$$\frac{1}{2}\lambda^2(\lambda+1)^2=0$$

שימו לב שיש לבדוק עבור $\lambda=1$ בנפרד.

יש שני ערכים עצמיים $\lambda=0,\lambda=-1$

אם $\lambda=0$ נקבל שהווקטור העצמי הוא פתרון של המערכת

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow B=\left\{t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}: t,s\in\mathbb{R}\right\}$$

אם $\lambda=-1$ נקבל שהווקטור העצמי הוא פתרון של המערכת

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B=\left\{ t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} : t,s \in \mathbb{R} \right\}$$

ב.

מכיון שמצאנו ארבעה ווקטורים עצמיים אז $A$ ניתנת ללכסון והמטריצה האלכסונית היא

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**שאלה 4**

פתור את המשוואות הבאות:

א. $z^3-10z^2+34z=0$.

ב. $z^2-(1-3i)z-2i-2=0$.

ג. $(i+1)(x+iy)=4+2i$. x,y מספרים ממשיים.

**פתרון**

א.

$$z^3-10z^2+34z=0$$

$z(z^2-10z+34)=0$ או ש $z=0$ או ש $z^2-10z+34=0$.

$$z^2-10z+34=0$$

$$z=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot 1\cdot 34}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{-36}}{2}$$

$$z_1=5+3i$$

$$z_2=5-3i$$

תשובה סופית: $z_1=5+3i, z_2=5-3i, z_3=0$.

ב.

$$z^2-(1-3i)z-2i-2=0$$

$$z=\frac{1-3i\pm\sqrt{(1-3i)^2+8i+8}}{2}=\frac{1-3i\pm\sqrt{2i}}{2}$$

ראינו בתרגול ש $(1+i)^2=2i$

$$z=\frac{1-3i\pm(1+i)}{2}$$
$$z_1=1-i$$
$$z_2=-2i$$
תשובה סופית: $z_1=1-i, z_2=-2i$.

ג.
$$(i+1)(x+iy)=4+2i$$
$$x-y+(x+y)i=4+2i$$
בתרגול ראינו ש $a+bi=c+di \leftrightarrow a=c\wedge b=d$.
לכן יש לפתור את מערכת המשוואות הבאה:
$$\begin{cases}x-y=4\\x+y=2\end{cases}\rightarrow x=3, y=-1$$
תשובה סופית: $x=3, y=-1$.

**<u>שאלה 5</u>**
חשב, ללא שימוש במשפט דה מואבר, את הביטויים הבאים:
א. $\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)^8$.
ב. $\frac{5}{3+2i}$.
ג. $\left(1+i+i^2+...+i^{34}\right)^{71}$.

**<u>פתרון</u>**
א. $256=16(2i)^4=16\left((1+i)^2\right)^4=\left(\sqrt{2}\right)^8(1+i)^8=\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)^8$.

ב. $\frac{15}{13}-\frac{10}{13}i=\frac{15-10i}{13}=\frac{5}{3+2i}\cdot\frac{3-2i}{3-2i}=\frac{5}{3+2i}$.

ג. $\left(1+i+i^2+...+i^{34}\right)^{71}$
תחילה נחשב את הסכום $1+i+i^2+...+i^{34}$
נשים לב ש $1+i+i^2+i^3=0$ ובאופן כללי לכל n טבעי מתקיים $i^{4n}+i^{4n+1}+i^{4n+2}+i^{4n+3}=0$.
ולכן $1+i+i^2+...+i^{34}+i^{35}=0\rightarrow 1+i+i^2+...+i^{34}=-i^{35}$.
$1+i+i^2+...+i^{34}=i \Leftarrow i^{35}=i^{4\cdot8}\cdot i^3=-i$.
כעת $\left(1+i+i^2+...+i^{34}\right)^{71}=i^{71}=i^{4\cdot17}\cdot i^3=-i$.

**<u>שאלה 6</u>**
א. הראה שלכל מספר מרוכב $z=a+bi$ יש הופכי ונגדי.

ב. הוכח שלכל שני מספרים מרוכבים $z_1, z_2$ (השונים מ 0) מתקיים $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$.

ג. בסדרה הנדסית נתון: $a_1=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ a_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

הוכח שלכל n טבעי סכום 6n האיברים הראשונים הוא 0.

ד. פתור, בעזרת משפט דה מאובר, את המשוואות הבאות:

i. $z^7=1$.

ii. $z^4=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{10}$.

**פתרון**

ג. תחילה נמצא את מנת הסדרה.

$$\frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}\cdot\frac{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

נחשב את הביטוי $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6$.

תחילה נציג את המספר $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ בצורה קוטבית. $r^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\rightarrow r=1$.

$\tan\theta=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}\rightarrow\theta=60^0$. הנקודה $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ נמצאת ברביע הראשון, ולכן

$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos 60^0+i\sin 60^0$.

סה"כ נקבל: $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6=\left(\cos 60^0+i\sin 60^0\right)^6=\cos 360^0+i\sin 360^0=1$

נחשב את הסכום של הסדרה ההנדסית.

מנת הסדרה היא $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

$$S_{6n}=\frac{a_1\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{6n}-1\right)}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-1}=\frac{a_1\left(1^n-1\right)}{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=0$$

ד.

$1=\cos\left(360^0k\right)+i\sin\left(360^0k\right)$ כאשר k מספר שלם.

$$z^7 = \cos\left(360^0 k\right) + i\sin\left(360^0 k\right)$$

$$z_k = \cos\left(\frac{360^0 k}{7}\right) + i\sin\left(\frac{360^0 k}{7}\right)$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, 6$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)^{10} = \left(\cos 45^0 + i\sin 45^0\right)^{10} = \cos 450^0 + i\sin 450^0 = \cos 90^0 + i\sin 90^0$$

דרך נוספת לחישוב: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)^{10} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}\left(\left(1+i\right)^2\right)^5 = \frac{1}{2^5} \cdot 2^5 \cdot i^5 = i = \cos 90^0 + i\sin 90^0$

$$z^4 = \cos\left(90^0 + 360^0 k\right) + i\sin\left(90^0 + 360^0 k\right)$$

$$z_k = \cos\left(18^0 + 72^0 k\right) + i\sin\left(18^0 + 72^0 k\right)$$

$$k = 0, 1, 2, 3$$