הרצאה 9

תזכורת – עוצמות = "גדלי אין-סוף"

$A \sim B \quad : \quad \exists f: A \to B$ חח"ע ועל

$|A| = |B|$

יח"ש

$|A| \leq |B| \quad : \quad \exists f: A \xrightarrow[\text{חח"ע}]{} B$:אמרנו

$\Longleftrightarrow \quad \exists g: B \xrightarrow[\text{על}]{} A$

$|\mathbb{N}| = \aleph_0$ – העוצמה האינסופית הקטנה ביותר

• A קב' בת מניה (Countable) אם: $|A| \leq \aleph_0$

סופית / $\aleph_0$

$\Longleftrightarrow$ ניתן לסדר בסדרה:

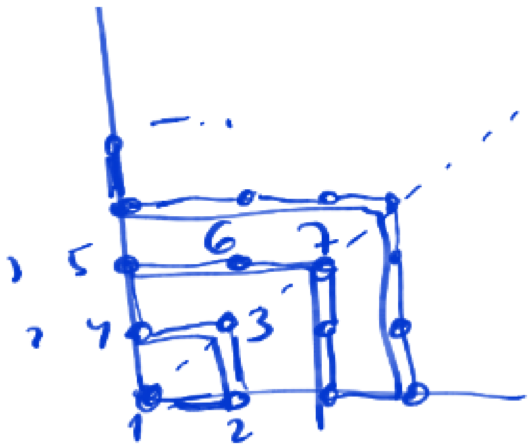
$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots$

כך שכל איבר ב-A מופיע בסדרה.

• $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

1



$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$k = \lceil \sqrt{n} \rceil$

$$f(n) = \begin{cases} (k,\ n-(k-1)^2) & , n \le k^2-k+1 \\ (k^2-n+1,\ k) & , n \ge k^2-k+1 \end{cases} \quad \text{, זוגי } k$$

$$\begin{cases} (n-(k-1)^2,\ k) & , n \le k^2-k+1 \\ (k,\ k^2-n+1) & , n \ge k^2-k+1 \end{cases} \quad \text{, אי זוגי } k$$

$$g(x,y) = \begin{cases} (x-1)^2+y & \text{, זוגי } x \\ x^2-y+1 & \text{, אי זוגי } x \end{cases} \quad , x \ge y$$

$g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\begin{cases} y^2-x+1 & \text{, זוגי } y \\ (y-1)^2+x & \text{, אי זוגי } y \end{cases} \quad , x \le y$$

הערה - מתקיים לכל קבוצה A אינסופית:

$$A \sim A \times A$$

(משפט המכפלה).

ההוכחה הנ"ל מראה את המשפט עבור $\aleph_0$.

הגדרה: העוצמה של קב' A היא מחלקת השקילות של A ביחס ל- $\sim$ (שקילות עוצמה).

עוצמת הרצף

סימון: העוצמה של $\mathbb{R}$ מסומנת $\aleph$.

אולי: $\aleph = \aleph_0$? אולי יש פונק' חח"ע ועל:

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R} \ ?$$

האלכסון של קנטור: $\aleph_0 < \aleph$.

הוכחה: נניח בשלילה כי יש $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ חח"ע ועל, כלומר ניתן לסדר את כל הממשיים:

$$f(1) = 1.\boxed{1}324\ldots$$
$$f(2) = 0.2\boxed{1}35\ldots$$

$$f(3) = 118.31\boxed{2}8\ldots$$
$$f(4) = 109.765\boxed{3}5\ldots$$
$$\vdots \qquad \ldots \quad 2$$
$$\vdots$$

נבנה מספר חדש.

$$X := 0.22121\ldots$$

עוברים על כל המספרים ברשימה. מתבוננים בספרה ה-n-ית אחרי הנקודה העשרונית של המספר $f(n)$. אם ספרה זו $\neq 2$, נכתוב במספר X בספרה ה-n-ית: 2

אם ספרה זו $= 2$, נכתוב בספרה ה-n-ית של X: 1.

נשים לב כי X אינו מופיע ברשימה:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) \neq X$$

נניח בשלילה כי $X = f(n)$.

נסמן לכל מס' ממשי y את הספרה ה-k שלו ב-

$$y_{(k)}$$

$$0.123\ldots_{(2)} = 2$$

בפרט,

$$x_n = f(n)_n$$

$$x_n = \begin{cases} 2 & , f(n)_n \neq 2 \\ 1 & , f(n)_n = 2 \end{cases}$$

לכן $x_n \neq f(n)_n$ ו- $x \neq f(n)$.

הערה: ישנם "ייצוגים" עשרוניים שונים עבור אותו מספר ממשי:

$$0.12999999\ldots = 0.13000000\ldots$$

זה המקרה היחיד (= החל מאיפשהו מקום '9') שבו יש "ייצוגים" עשרוניים מייצגים ע"י אותו המספר הממשי.

אצלנו (ב-x) אין בעיה כזו מכיוון שכל ספרותיו הן 1 או 2, לא 0 או 9.

קיבלנו $x \neq f(n)$ לכל $n \in \mathbb{N}$, בסתירה לכך ש- $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ על.

סימון: $x_0 \neq x'$.

מ.ש.ל.

<u>דוגמה 13</u>: $|(0,1)| = \aleph$.

$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

הוכחה: נראה:

(1) $|(0,1)| = |\mathbb{R}_{>0}|$

(2) $|\mathbb{R}_{>0}| = |\mathbb{R}|$

(1): נגדיר פונק' חח"ע ועל:

$$f : \mathbb{R}_{>0} \to (0,1)$$

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

f חח"ע ועל, $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-y}$.

(2) נגדיר ב-

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$$

$$g(x) = e^x$$

גם חח"ע ועל.

עוצמת קבוצת החזקה

נניח A סופית. מהי העוצמה של $P(A)$?

$$2^{|A|}$$

(כפי שראינו למשל באינדוקציה).

מה קורה במקרה האינסופי?

משפט קנטור: לכל קבוצה A:

$$|A| < |P(A)|.$$

(כלומר,

$$\underbrace{|\mathbb{N}|}_{\aleph_0} < \underbrace{|P(\mathbb{N})|}_{\aleph} < |P(P(\mathbb{N}))| < \cdots$$

אינסוף עוצמות.)

נראה בהמשך כי:
$\mathbb{R} \sim P(\mathbb{N})$.

הוכחת המשפט:

הוכחת הלמה: $|A| < 2^{|A|}$ (כבר ראינו)

[illegible]

נניח A אינסופית.

הוכחה, נראה כי $|A| \le |P(A)|$. $\exists$ פונק' חח"ע:

$$g : A \longrightarrow P(A)$$

$$g(a) = \{a\}$$

כעת ניגש לגוף המשפט: להראות כי $|A| \neq |P(A)|$.

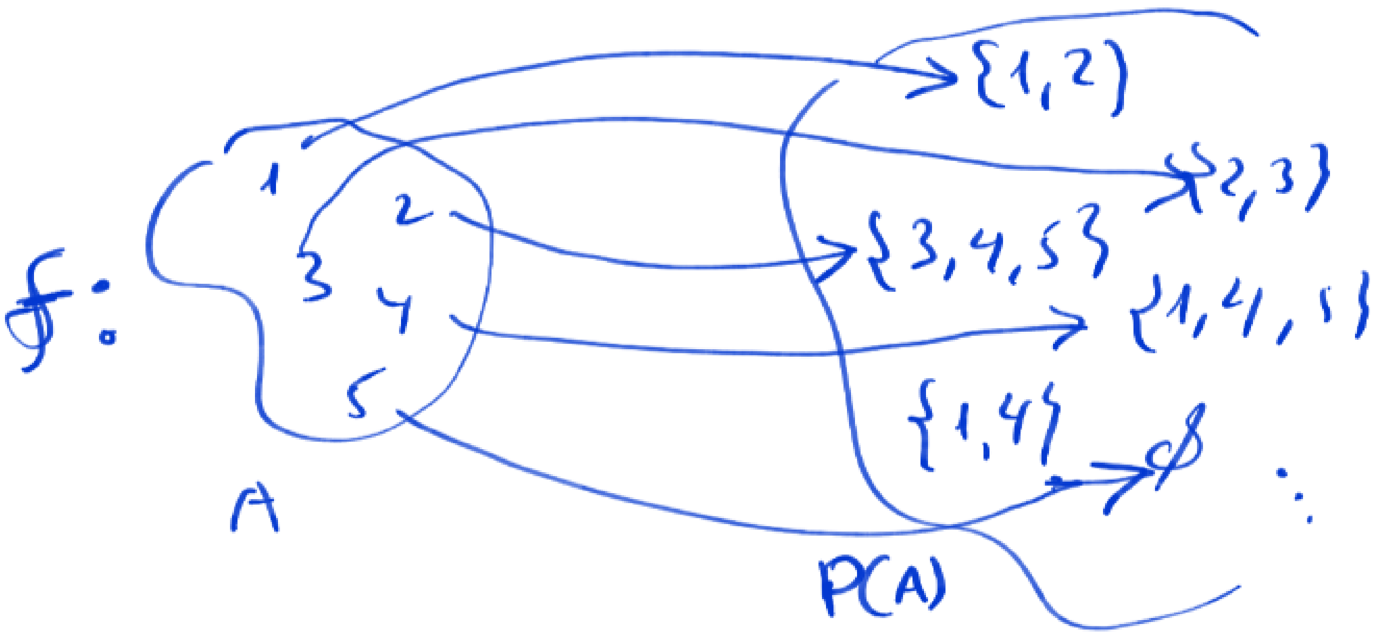
נניח בשלילה כי $|A| = |P(A)|$.
כלומר, קיימת פונק' חח"ע ועל:

$$f : A \longrightarrow P(A).$$

נגדיר קבוצה:

$$D := \{a \in A \mid a \notin f(a)\}.$$

דוגמה:



[illegible]

$$D=\{2,5\}$$

$f(2)=\{3,4,5\}$

$2\notin f(2)$

$f(5)=\emptyset$

$5\notin\emptyset$

כמובן, $D\in P(A)$.

ונזכור כי f על. בפרט, ל-D יש מקור תחת f:

$$\exists b\in A:\quad D=f(b)$$

$[D=\{a\in A\mid a\notin f(a)\}]$

ישנם שני מקרים:

(1) אם $b\in D$, לפי הגדרת D:

$b\notin f(b)=D$, סתירה.

(2) אם $b\notin D$, אז לפי הגדרת D:

$b\in f(b)=D$, סתירה.

לכן אין פונקציה על $f:A\to P(A)$. מ.ש.ל.

ק.ש.ב:

$$|A|\le|B|,\quad |B|\le|A|$$

$$\Rightarrow\quad |A|=|B|$$

לא נוכיח כרגע אלא בהמשך.

אריתמטיקת עוצמות

(נגדיר: a^b , $\times$, $+$ של עוצמות)

1) חיבור עוצמות. תהיינה A,B קבוצות.
נגדיר את חיבור העוצמות שלהן:

$$|A|+|B| := |A \dot\cup B|$$

איחוד זר - $A\dot\cup B = (A\times\{0\})\cup(B\times\{1\})$

$A=\{1,2\}$
$B=\{1,2,3\}$

$|A|+|B| = 5$

$$\cancel{|A|+|B| = |A\cup B| = |\{1,2,3\}| = 3}$$

$$|A|+|B| = |A\dot\cup B| = |\{1,2\}\times\{0\} \cup \{1,2,3\}\times\{1\}|$$

$(1,0)$ $(2,0)$; $(1,1)$ $(2,1)$ $(3,1)$

$= 5$

הטריק של $\times\{0\}\ldots$, $\times\{1\}\ldots$ הוא "קסם"
לוודא שגם אם לקחנו A,B שיש להן איברים
משותפים הם ייחשבו כשונים

הערה: כדי שההגדרה תהיה בלתי תלויה בבחירה של A,B (רוצים לאשר חשבון עוצמות, לא חשבון קבוצות) צריך להראות:

אם $A_1 \sim A_2$, $B_1 \sim B_2$ אז: $|A_1|+|B_1| = |A_2|+|B_2|$

$$\aleph_0 + \aleph_0 = ?$$

$$\to \; |\mathbb{N}| + |\mathbb{N}| = (1) \; ?$$

$$\to \; |\mathbb{Z}| + |\mathbb{N}\times\mathbb{N}| = (2)$$

נניח: $A_1 \sim A_2$: $\exists f: A_1 \longrightarrow A_2$ חח"ע ועל

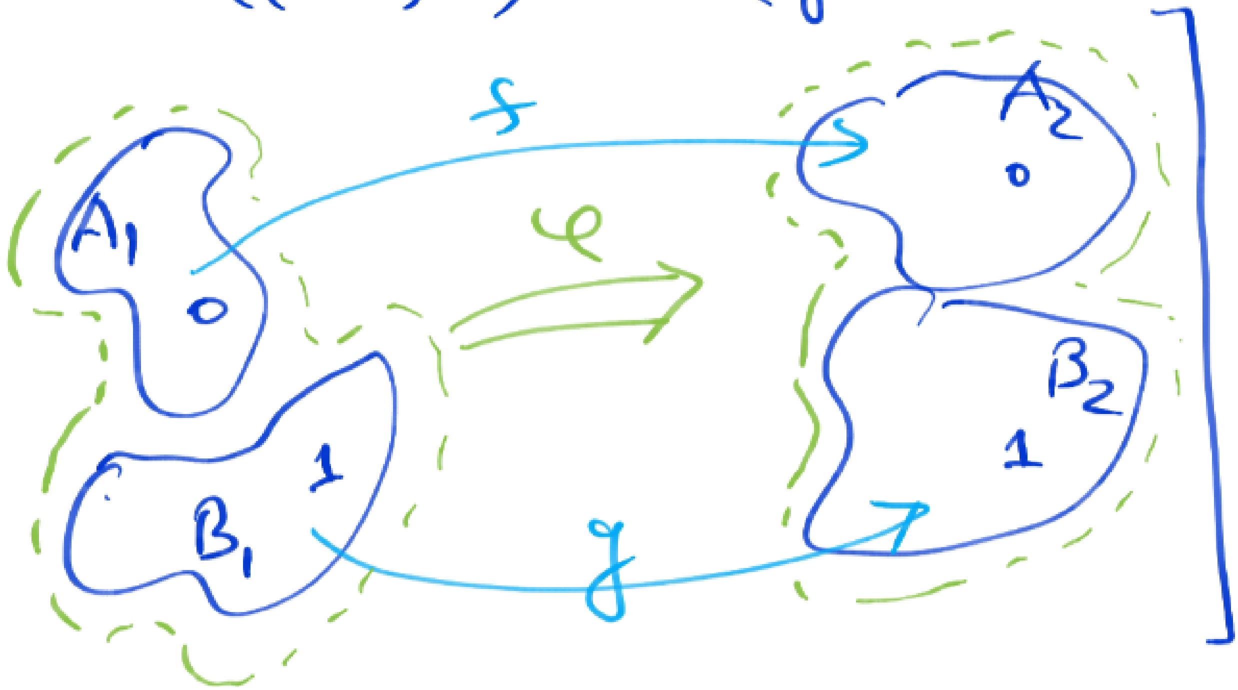
$B_1 \sim B_2$: $\exists g: B_1 \longrightarrow B_2$ חח"ע ועל

לכן, אם נגדיר:

$$\varphi: A_1 \cup B_1 \longrightarrow A_2 \,\dot\cup\, B_2$$

$$A_1 \cup B_1 = A_1\times\{0\} \cup B_1\times\{1\} \qquad A_2 \,\dot\cup\, B_2 = A_2\times\{0\} \cup B_2\times\{1\}$$

$$\varphi((a_1,0)) = (f(a_1),0)$$
$$\varphi((b_1,1)) = (g(b_1),1)$$



נראה כי φ חח"ע ועל:

$$\varphi((x,\underbrace{y}_{0,1})) = \varphi((x',\underbrace{y'}_{0,1}))$$

אם $y \neq y'$ אז גם קואורדינטה ימין של הפלטים יהיו שונות.

אם $y=y'$,

אם $y=y'=0 \Leftarrow$

$$\varphi((x,0)) = (f(x),0)$$
$$\overset{\shortparallel}{\varphi((x',0))} = (f(x'),0)$$

לכן $f(x)=f(x')$ וכן f חח"ע ולכן $x=x'$.

ולכן: $(x,y)=(x',y')$.

$$\varphi((x,1)) = (g(x),1) \Leftarrow y=y'=1 \text{ אם }$$ בחירה,

$$\parallel$$

$$\varphi((x',1)) = (g(x'),1)$$

ולכן $g(x)=g(x')$ וכי g חח"ע ולכן $x=x'$.

לכן: $(x,y)=(x',y')$.

<u>תכונות חיבור עוצמות:</u>

1. $|A|+|B| = |B|+|A|$

2. $(|A|+|B|)+|C| = |A|+(|B|+|C|)$

<u>הוכחה:</u>

1. צ"ל:

$$\exists f : A \dot\cup B \longrightarrow B \dot\cup A$$

חח"ע ועל

$$A \dot\cup B = A\times\{0\} \cup B\times\{1\}$$

$$B \dot\cup A = B\times\{0\} \cup A\times\{1\}$$

$$f((a,0)) = (a,1)$$

$$f((b,1)) = (b,0)$$

על: כל איבר בטווח הוא או $(b,0)$ או $(a,1)$.

חח"ע: נניח $f((x,y)) = f((x',y'))$

אם $y \neq y'$ אזי קורד' ימין של הפלטים שונות.

אם $y=y'=0$, $f((x,0)) = f((x',0))$

$$\begin{array}{ccc} f((x,0)) & = & f((x',0)) \\ \parallel & & \parallel \\ (x,1) & & (x',1) \end{array} \Rightarrow x=x'$$

ובדומה עבור $y=y'=1$.

② נוסף: תרגיל רשות (לא להגשה).

<u>דוגמאות:</u>

① אם $\underset{n}{A},\underset{m}{B}$ סופיות: $|A|+|B| = n+m$

② $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$. נבנה פונק' חח"ע ועל:

$$f: \underset{\{(n,0) \mid n\in\mathbb{N}\} \cup \{(n,1) \mid n\in\mathbb{N}\}}{\underset{\parallel}{\mathbb{N} \mathbin{\dot\cup} \mathbb{N}}} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$f((n,0)) = 2n$$
$$f((n,1)) = 2n-1$$

f מוגדרת היטב, חח"ע ועל.

(3) $\aleph_0 + 17 = \aleph_0$. (המלון של הילברט נקלט הראשונים.)

(4) $\aleph + \aleph = \aleph$.

$\aleph = |\mathbb{R}|$

(5) לכל a,b עוצמות (אינסופיות):

$$a+b=\max\{a,b\}$$

בפרט, לכל עוצמה אינסופית: $a+a=a$.

$\underline{\aleph+\aleph\le\aleph}$:

ראינו: $\aleph = |(0,1)|$

ולכן:

$$\aleph+\aleph = |(0,1)\dot\cup(1,2)| = |\underbrace{(0,1)\cup(1,2)}_{\text{תת-קב'}\ \mathbb{R}}| \le |\mathbb{R}| = \aleph$$

הקטעים זרים ולכן האיחוד הזר ~ לאיחוד

$\boxed{\text{השערת הרצף: אין עוצמה } \aleph_0 < a < \aleph.}$

לימים, הוכח שלא ניתן להוכיח השערה זו,
אבל גם לא ניתן להפריך אותה.

מכפלת עוצמות. תהיינה A, B קב׳.
נגדיר:
$|A| = a, \quad |B| = b$

$$\boxed{a \cdot b := |A \times B|}$$

עוצמת המכפלה הקרטזית.

לקב׳ סופיות: מתיישב כמו כפל רגיל.

$$\left(|\{1,2,3\} \times \{x, y, z, w\}| = 3 \cdot 4 = 12\right)$$

נוכיח כי המכפלה מוגדרת היטב.

נניח $|A_1| = |A_2|$, $|B_1| = |B_2|$, צ״ל:

$$|A_1 \times B_1| = |A_2 \times B_2|$$

$$\aleph_0 \times \aleph_0 = ?$$

- $|\mathbb{N}| \times |\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$
- $|\mathbb{Q}| \times |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = ?$ ..

צ"ל למעשה —
תוצאה אריתמטית העוצמה איננה תלויה בבחירת הקבוצות המייצגות את העוצמה הללו.

ידוע שקיימות:

$\exists\, f: A_1 \longrightarrow A_2$ חח"ע ועל

$\exists\, g: B_1 \longrightarrow B_2$ חח"ע ועל

צ"ל פונקציה חח"ע ועל:

$$\varphi: A_1 \times B_1 \longrightarrow A_2 \times B_2$$

נגדיר: $\varphi(a_1, b_1) := (f(a_1), g(b_1))$.

φ חח"ע — נניח: $\varphi((a_1,b_1)) = \varphi((a_1', b_1'))$

$$(f(a_1), g(b_1)) \qquad (f(a_1'), g(b_1'))$$

נקבל: $f(a_1) = f(a_1'),\ g(b_1) = g(b_1')$

אבל, f,g חח"ע ולכן: $a_1 = a_1'$, $b_1 = b_1'$

וקיבלנו $(a_1, b_1) = (a_1', b_1')$ כנדרש.

לכן φ חח"ע.

φ על - יהי $(a_2,b_2)\in A_2\times B_2$ איבר כלשהו.

$\exists a_1\in A_1:\ f(a_1)=a_2 \Leftarrow$ f על

$\exists b_1\in B_1:\ g(b_1)=b_2 \Leftarrow$ g על

ע"כ:

$$\varphi((a_1,b_1)) \underset{\text{הג' }\varphi}{=} (f(a_1),g(b_1)) = (a_2,b_2)$$

כלומר, φ על.

<u>תכונות כפל עוצמות:</u> תהיינה α,β,γ עוצמות:

1. $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$
2. $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$

<u>הוכחה של 2:</u> תהיינה A,B,C כך: $|A|=\alpha,\ |B|=\beta,\ |C|=\gamma$

נג': פונק' חח"ע ועל:

$$f:(A\times B)\times C\longrightarrow A\times(B\times C)$$

$$f\big(((a,b),c)\big)=(a,(b,c))$$

ברור כי חח״ע ועל.

① : $f: A\times B \longrightarrow B\times A$

$$f((a,b)) = (b,a).$$

<u>תכונה נוספת</u> – דיסטריבוטיביות.

$$\alpha\cdot(\beta+\gamma) = \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$$

<u>הוכחה</u>:

תהיינה A,B,C עוצמות α,β,γ בהתאמה.

נבנה פונק׳ חח״ע ועל:

$$f: A\times(\underbrace{B\dot\cup C}) \longrightarrow A\times B\dot\cup A\times C$$

$(a,(b,0))$ $\qquad$ $((a,b),0)$

או $\qquad$ או

$(a,(c,1))$ $\qquad$ $((a,c),1)$

אזי, נגדיר:

$$f((a,(b,0))) = ((a,b),0)$$
$$f((a,(c,1))) = ((a,c),1)$$

מראים כי חח״ע ועל באופן ישיר. $\qquad$ מ.ש.ל.

דוגמאות:

① α, β עוצמות סופיות $\alpha = n$, $\beta = m$ $\quad$ $\alpha \cdot \beta = nm$.

② $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$

$$|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$$

הוכחנו (במתמטיקה השיפור).

③ אם α, β עוצמות אינסופיות:

$$\alpha \cdot \beta = \max\{\alpha, \beta\}$$

בפרט, לכל עוצמה α (אינסופית) מתקיים: $\alpha \cdot \alpha = \alpha$.

④ $\aleph \times \aleph_0 \leq \aleph$ $\quad$ (למעשה $=$).

הוכחה: $\aleph = |(0,1)|$.

קודם כל, לכל קטע (a,b), $a<b$ מתקיים:

$$|(a,b)| = \aleph$$

(הוכחה)

$$f: (0,1) \to (0, b-a)$$

$$f(x) = (b-a)x$$

$$g : (0, b-a) \to (a,b)$$

$$g(x) = x + a$$

ההרכבה תהיה חח"ע ועל:

$$g \circ f : (0,1) \to (a,b)$$

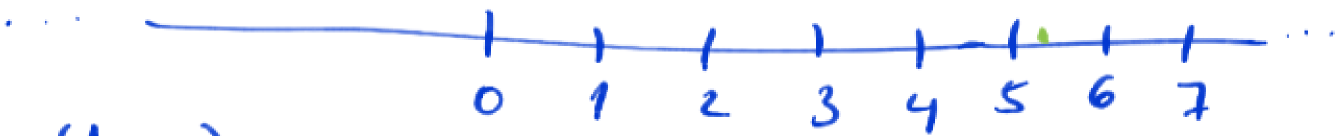
$$(g\circ f)(x) = g((b-a)x) = (b-a)x + a$$

מסקנה - כל הקטעים הממשיים שקולי עוצמה.

דרך, לכל $n \in \mathbb{N}$, $|(n,n+1)| = \aleph$.

$$\varphi : (0,1) \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi(x,n) \longmapsto n + x$$



$$\varphi\left(\tfrac{1}{3}, 5\right) = \bullet$$

φ חח"ע ועל:

$$|(\text{line}^{33}| = |(0,1)\times\mathbb{N}| = |(0,1)| \times |\mathbb{N}| =$$

$$= \aleph \times \aleph_0$$

$$|[illegible]| = |\mathbb{R}| = \aleph$$

מסקנה: $\aleph \times \aleph_0 \le \aleph$.

$\boxed{\text{חזקות}}$.

תהיינה α,β עוצמות. נניח A,B כך:
$$|A|=\alpha,\quad |B|=\beta$$

נגדיר:
$$\alpha^\beta := |A^B| = |\{f : B \to A\}|$$

כרגיל, נתחיל בהוכחה שההגדרה לא תלויה בבחירת הקבוצות A,B.

נניח $|A_1|=|A_2|$, $|B_1|=|B_2|$ אז:
$$|A_1^{B_1}| = |A_2^{B_2}|$$

כדי להוכיח פונק' חח"ע ועל:

[illegible]

$$f: A_1 \longrightarrow A_2$$
$$g: B_1 \longrightarrow B_2$$

נגדיר פונקציה:

$$F: A_1^{B_1} \longrightarrow A_2^{B_2}$$

$$\varphi: B_1 \to A_1 \rightsquigarrow F(\varphi): B_2 \to A_2$$

$$\begin{tikzcd}
B_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "g"'] & A_1 \arrow[d, "f"] \\
B_2 \arrow[u, bend left, "g^{-1}"] \arrow[r, "?"] & A_2
\end{tikzcd}$$

נגדיר:

$$F(\varphi) := f \circ \varphi \circ g^{-1}$$

$F(\varphi)$ היא פונקציה מ- B_2 ל- A_2 (כי $\varphi: B_1 \to A_1$).

נראה כי F חח"ע ועל.

F חח"ע: נניח $F(\varphi) = F(\psi)$

לאיזשהן פונקציות $\varphi, \psi: B_1 \to A_1$.

צ"ל: $\varphi = \psi$.

$$F(\varphi) = F(\psi)$$
$$\parallel \qquad\qquad \parallel$$
$$f\circ\varphi\circ g^{-1} \qquad f\circ\psi\circ g^{-1}$$

נרכיב מימין על שני האגפים את g, ומשמאל את f^{-1} (קיימת כי f חח״ע ועל):

$$f\circ\varphi\circ g^{-1} = f\circ\psi\circ g^{-1}$$
$$\Downarrow$$
$$\underbrace{(f^{-1}\circ f)}_{I_{A_1}}\circ\varphi\circ\underbrace{(g^{-1}\circ g)}_{I_{B_1}} = \underbrace{(f^{-1}\circ f)}_{I_{A_1}}\circ\psi\circ\underbrace{(g^{-1}\circ g)}_{I_{B_1}}$$
$$\Downarrow$$
$$\varphi = I_{A_1}\circ\varphi\circ I_{B_1} = I_{A_1}\circ\psi\circ I_{B_1} = \psi$$

כנדרש.

<u>F על</u>: יהי: $\psi\in A_2^{B_2}$

כלומר: $\psi: B_2\to A_2$

נראה כי קיים $\varphi: B_1\to A_1$ כך ש- $F(\varphi)=\psi$.

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[r] & A_1 \arrow[d, "f"] \\ B_2 \arrow[u, "g^{-1}"] \arrow[r, "\psi"] & A_2 \end{tikzcd}$$

צ"ל: φ כך ש- $F(\varphi) = \psi$

$$F(\varphi) = f \circ \varphi \circ g^{-1}$$

אכן, ניקח:

$$\varphi = f^{-1} \circ \psi \circ g$$

(נשים לב כי φ מוגדרת היטב, מ- B_1 ל- A_1.)

לכן F על, כנדרש. מ.ש.ל.

סיימנו להוכיח כי חזקת עוצמות מוגדרת היטב.

<u>תכונות:</u> (בלי הוכחה) עבור α, β, γ עוצמות.

① $$\alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma} = \alpha^{\beta+\gamma}$$

② $$(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$$

$\alpha^{\beta}\gamma^{\beta} = (\alpha\cdot\gamma)^{\beta}$ ③

<u>הוכחה של</u> ②:

תהיינה A,B,C קב' מעוצמות α,β,γ בהתאמה.
צ"ל:

$$F : \underbrace{(A^B)^C}_{\text{פונקציות מ-}C\text{ ל-}A^B} \longrightarrow \underbrace{A^{B\times C}}_{\text{פונקציות מ-}B\times C\text{ ל-}A}$$

חח"ע ועל.

נגדיר את F כדלקמן.

יהא $f: C\to A^B$, נאמר לכל $c\in C$, $f(c)$ היא פונקציה:
$f(c): B\to A$.

נגדיר את $F(f)$ (פונקציה: $F(f): B\times C\to A$).

$$\boxed{(F(f))(b,c) := \underbrace{(f(c))}_{\text{פונקציה: }B\to A}(b) \in A}$$

F מוגדרת היטב.

<u>F חח"ע</u>: יהיו $f,g: C\to A^B$

ונניח כי $F(f)=F(g)$, נראה $f=g$.

נניח שלכל $(b,c)\in B\times C$ מתקיים:

$$(F(f))(b,c) = (F(g))(b,c)$$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$(f(c))(b) = (g(c))(b)$$

כלומר, שלכל $c\in C$, הפונקציות $f(c)=g(c)$

(מכיוון שבכל נקודה, הן מקבלות אותו הערך).

אבל זה בדיוק אומר ש- $f=g$, כי לכל $c\in C$ מתקיים: $f(c)=g(c)$.

<u>על F</u>:

$$F: (A^B)^C \longrightarrow A^{B\times C}$$

נתונה $g: B\times C\to A$ פונקציה, צ"ל שקיימת $f: C\to A^B$ כך ש- $F(f)=g$.

נגדיר f:

$$\forall c\in C,\quad f(c): B\longrightarrow A$$

$$(f(c))(b) := g(b,c)$$

מצאנו f מקור ל- g את F?

כי / חצאי

$$\big(F(f)\big)(b,c) \underset{\text{מהגדרת } F}{=} \big(f(c)\big)(b) = g(b,c)$$

נובע ש- $F(S)=g$ (כי לכל הצבה (b,c)

מתקיים!

$\big(F(S)\big)(b,c) = g(b,c)$).

מ.ש.ל.

תרגיל רשות – להוכיח במלואן את תכונות ①,③.

<u>טענה:</u> תהא A קבוצה. אזי:

$$|P(A)| = 2^{|A|}$$

<u>הוכחה:</u> ראינו: יש פונק' חח"ע ועל:

$$f: P(A) \longrightarrow \{0,1\}^A$$

מסקנה:

$$|P(A)| = \left|\{0,1\}^A\right| =$$

$$\underset{\text{מהגדרה}}{=} |\{0,1\}|^{|A|} = 2^{|A|}$$

חזקת עוצמות

מ.ש.ל.

הערה - נזכר ב- f:

$$f: P(A) \longrightarrow \{0,1\}^A$$

$$X \subseteq A \longmapsto F(X): A \to \{0,1\}$$

$$\boxed{\left(f(X)\right)(\underset{\underset{A}{\cap}}{a}) = \begin{cases} 1 & , a \in X \\ 0 & , a \notin X \end{cases}}$$

'אינדיקטור' של הקבוצה X.

השוואת עוצמות:

נניח $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ עוצמות:

① $\begin{matrix} \alpha \le \gamma \\ \beta \le \delta \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} \alpha+\beta \le \gamma+\delta \\ \alpha\cdot\beta \le \gamma\cdot\delta \end{matrix}$

② $\gamma \neq 0 \Longrightarrow \alpha^\beta \le \gamma^\delta$

הוכחה - נראה בהרצאה הבאה.