

לינארית 1 (88112), סמטסטר קיץ תשעט, מועד ב'

24.9.2019, כ"ד אלול תשעט

מרצים: מר אחיה בר-און, ד"ר אליהו מצרי, מר אלעד עטיי, ד"ר ארז שיינר
מתרגלים: רועי אבל, ניקול בלשוב, עדי בן-צבי, תמר בר-און, אריאל ויצמן, עוזי חרוש, פולינה לוצקר, אושרית שטוסל.
אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על כל 5 השאלות.
- יש לענות על דפי הבחינה בלבד.
ניתן להשתמש במחברת כטיוטא, אך המחברת לא תיבדק כלל.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי- מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.
- סימונים לאורך הבחינה: עבור מטריצה A , נסמן:
 - $N(A)$ את מרחב האפס של A .
 - $C(A)$ את מרחב העמודות של A .
 - $R(A)$ את מרחב השורות של A .
 - $rank(A)$ את הדרגה של A .

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה! ☺

1. (23 נק') תהא $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ מטריצה התלויה בפרמטר a .

(א) מצאו לאילו ערכי $a \in \mathbb{R}$ המטריצה A הפיכה.

(ב) מצאו לאילו ערכי $a \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $\begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ 1 \end{pmatrix} \in C(A)$.

(ג) לכל ערך $a \in \mathbb{R}$, מצאו בסיס ומימד ל $N(A)$ (חלקו למקרים).

(ד) עבור $a = 1$, מצאו בסיס וחיתוך $N(A) \cap C(A)$.

דף נוסף לשאלה מספר ---

דף נוסף לשאלה מספר ---

2. (24 נק') נסמן $V = \mathbb{R}^3$ ונתון כי

$$B = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס ל V . נגדיר העתקה לינארית $T : V \rightarrow V$ ע"י

$$T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + b - 2c \\ a \\ -a + b + c \end{pmatrix}$$

(א) מצאו בסיס C ל V כך ש $[T]_C^B = I$.

(ב) הוכיחו כי T הפיכה ומצאו נוסחה מפורשת עבור $T^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

(ג) חשבו את $\text{rank}([T^2]_B^B)$ (כאשר $T^2 = T \circ T$).

(ד) מצאו בסיס C ל V עבורו $[T]_B^C = I$, או הוכיחו (בלי למצוא אותו מפורשות) שקיים בסיס כזה.

דף נוסף לשאלה מספר ---

דף נוסף לשאלה מספר ---

3. (21 נק') תהא $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית.

הוכיחו/הפריכו:

(א) אם $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^3)$ אז $C(A) = C(A^2)$

(ב) אם $\text{rank}(A^2) = \text{rank}(A^3)$ אז $C(A) = C(A^2)$

(ג) אם $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^2)$ אז $C(A) = C(A^3)$

דף נוסף לשאלה מספר ---

דף נוסף לשאלה מספר ---

4. (16 נק') יהא V מרחב וקטורי מימד n (טבעי) ותהא $T : V \rightarrow V$ העתקה לינארית.

(א) הוכיחו: אם T אינה העתקת האפס (כלומר לא שולחת את כל הוקטורים לאפס) אז קיים בסיס $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ ל V עבורו מתקיים $Tv_i \neq 0$ לכל $1 \leq i \leq n$.

(ב) הוכיחו/הפריכו: קיים בסיס $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ ל V עבורו מתקיים $v_i \in \text{Im}(T) + \ker(T)$ לכל $1 \leq i \leq n$.

דף נוסף לשאלה מספר ---

דף נוסף לשאלה מספר ---

5. (16 נק')

(א) מצאו מטריצה הפיכה $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ המקיימת $A = \text{adj}(2A)$.

(ב) מצאו מטריצה הפיכה $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ המקיימת $A = \text{adj}(-2A)$.

דף נוסף לשאלה מספר ---

דף נוסף לשאלה מספר ---