

24/03/22 – מועד ב' – 89-214 מבנים אלגבריים

משך המבחן – שלוש שעות. חומר עזר אסור - השימוש במחשבון מותר. מרצה – דר' ארז שיינר

כל שאלה שווה 28 נקודות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל-100.

1. נביט בחבורות הבאות עם פעולות כפל:

$$GL_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid \det(A) \neq 0\}$$

$$SL_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid \det(A) = 1\}$$

$$SL_2^\pm(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid (\det(A))^2 = 1\}$$

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

א. הוכיחו או הפריכו: $SL_2(\mathbb{R})$ היא תת חבורה נורמלית של $GL_2(\mathbb{R})$.

ב. הוכיחו או הפריכו: קיים הומומורפיזם על $f: GL_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+$.

ג. הוכיחו או הפריכו: $SL_2^\pm(\mathbb{R})$ היא תת חבורה נורמלית של $GL_2(\mathbb{R})$.

2. תהי S_n חבורת התמורות, ונביט בתת הקבוצה $U \subseteq S_n$ המכילה את כל התמורות מסדר זוגי:

$$U = \{f \in S_n \mid o(f) \equiv_2 0\}$$

א. הוכיחו או הפריכו: U תת חבורה של S_n .

ב. הוכיחו או הפריכו: לכל תמורה אי זוגית $f \in S_n$ (כלומר $sign(f) = -1$) מתקיים כי $f \in U$.

3. אליס רוצה לבדוק האם המספר 6601 הוא מספר ראשוני באמצעות אלגוריתם מילר רבין.

א. האם $a = 2$ הוא עד חזק לראשוניות של 6601?

ב. האם $a = 16$ הוא עד חזק לראשוניות של 6601?

ג. העזרו בסעיפים הקודמים על מנת לקבוע אם 6601 ראשוני או לא.

4. המטריצה $A \in \mathbb{Z}_2^{3 \times 4}$ (3 שורות ו-4 עמודות) מגדירה קידוד לינארי יחד עם המטריצה המקודדת $G = \begin{pmatrix} I \\ A \end{pmatrix}$.

א. מצאו A כך שאם $v = Gx$ מילה חוקית, אז לכל $1 \leq i, j \leq 5$ גם $v + e_i + e_j$ מילה חוקית, או הוכיחו שאין כזו.

ב. מצאו A כך שאם $v = Gx$ מילה חוקית, אז לכל $1 \leq i, j \leq 6$ גם $v + e_i + e_j$ מילה חוקית, או הוכיחו שאין כזו.