# חישוב אורך של עקומות על משטח

נתונה עקומה $\alpha\left(t\right)$ במישור, ומשטח הנתונה ע"י פרמטריזציה $X\left(u^{1},u^{2}\right)$. נגדיר:

$$X_{1}=\frac{\partial X}{\partial u^{1}}\qquad X_{2}=\frac{\partial X}{\partial u^{2}}$$

$$g_{11}=X_{1}^{2}\qquad g_{12}=g_{21}=X_{1}X_{2}\qquad g_{22}=X_{2}^{2}$$

אם נגדיר את העקומה $\beta\left(t\right)$ במרחב הרכבה של $\alpha$ על $X$, כלומר

$$\beta=X\circ\alpha$$

$$\alpha\left(t\right)=\left(\alpha^{1}\left(t\right),\alpha^{2}\left(t\right)\right)\Rightarrow\beta\left(t\right)=X\circ\alpha\left(t\right)=X\left(\alpha^{1}\left(t\right),\alpha^{2}\left(t\right)\right)$$

אזי האורך של $\beta$ הוא:

$$L_{\beta}=\int_{t_{0}}^{t_{1}}\sqrt{g_{11}\left(\frac{\mathrm{d}\alpha_{1}}{\mathrm{d}t}\right)+2g_{12}\left(\frac{\mathrm{d}\alpha_{1}}{\mathrm{d}t}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\alpha_{2}}{\mathrm{d}t}\right)+g_{22}\left(\frac{\mathrm{d}\alpha_{2}}{\mathrm{d}t}\right)^{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$L_{\beta}=\int_{t_{0}}^{t_{1}}\underbrace{\sqrt{g_{ij}\frac{\mathrm{d}\alpha_{i}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\alpha_{j}}{\mathrm{d}t}}\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}s}=\int_{t_{0}}^{t_{1}}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\right)^{t}\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}\left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\right)}\,\mathrm{d}t$$

$\mathrm{d}s$ - אלמנט אורך של עקומה.

**מטריקה:** $\mathrm{d}s^{2}=g_{11}\mathrm{d}\alpha_{1}^{2}+2g_{12}\mathrm{d}\alpha_{1}\mathrm{d}\alpha_{2}+g_{22}\mathrm{d}\alpha_{2}^{2}$

- המקדמים $g_{ij}$ נקראים "מקדמי המטריקה"
- התבנית הבי־לינארית $F_{1}\left(u,v\right)=u\left(g_{ij}\right)v$ נקראת "תבנית יסודית 1"

## תרגיל

נתון התחום $\Omega=\left\{ \left(u,v\right)\in\mathbb{R}^{2}\middle|\begin{array}{c}0\le u\le2\pi\\ 0\le v\le2\pi\end{array}\right\}$

$\alpha\left(t\right)=\left(t,t\right)$ עקומה ב$\Omega$ בקטע $0\le t\le2\pi$

### סעיף א

מהו אורך העקומה $\alpha$ ב$\Omega$?

**פתרון**

$\alpha\left(t\right)=\left(t,t\right)$. לפי משפט פיטגורס $\Leftarrow L_{\alpha}=\sqrt{2}\cdot2\pi$.

$\Gamma$ נתונה עם מטריקה אוקלידית $\mathrm{d}s^{2}=\mathrm{d}x^{2}+\mathrm{d}y^{2}$. התבנית היסודית הראשונה - $g_{ij}\to F_{1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

$$L_{\alpha}=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{1\cdot1^{2}+2\cdot0\cdot1\cdot1+1\cdot1^{2}}\,\mathrm{d}t=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{2}\mathrm{d}t=\sqrt{2}\cdot2\pi$$

## סעיף ב

משטח $S_{1}$ נתון ע"י פרמטריזציה

$$\begin{gathered}X:\Omega\to\mathbb{R}^{3}\\ \left(u,v\right)\mapsto\left(u\cos v,u\sin v,v\right)\end{gathered}$$

מצא את אורך העקומה $X\circ\alpha\left(t\right)$.

איך נראה המשטח?

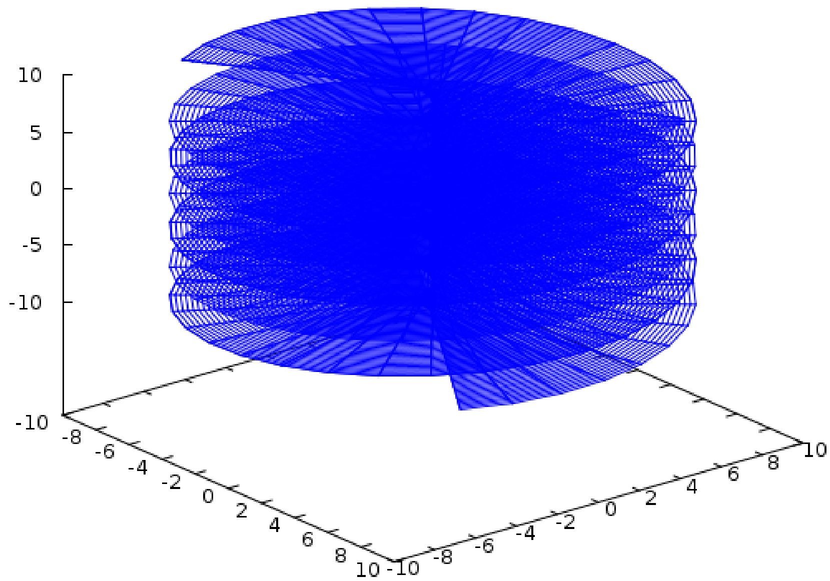
**פתרון**

$u$ קבוע $\Leftarrow$ Helix:

$u=0\Leftarrow\left(0,0,v\right)$

$v=0\Leftarrow\left(u,0,0\right)$

$v=2\pi\Leftarrow\left(4,0,2\pi\right)$




$$\alpha_1(t) = u(t) = t \qquad \alpha_2(t) = v(t) = t$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\alpha_1}{\mathrm{d}t} = 1 \qquad \frac{\mathrm{d}\alpha_2}{\mathrm{d}t} = 1}$$

$$\begin{array}{r} X_u = (\cos v, \sin v, 0) \\ X_v = (-u \sin v, u \cos v, 1) \end{array} \Rightarrow F_1 = g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2+1 \end{pmatrix}$$

$$X_u \cdot X_u = 1 \qquad X_u = X_v = 0 \qquad X_v \cdot X_v = u^2+1$$

## סעיף ג

משטח $S_2$ נתון ע"י פרמטריזציה

$$\begin{array}{c} \tilde{X} : \Omega \to \mathbb{R}^3 \\ (u,v) \mapsto (\cos u, \sin u, v) \end{array}$$

חשב את האורך של $\tilde{X} = \alpha(t)$

#### פתרון

המשטח הוא גליל.

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_1}{\mathrm{d}t}=1 \qquad \frac{\mathrm{d}\alpha_2}{\mathrm{d}t}$$

נחשב את $g_{ij}$

$$X_u=(-\sin u,\cos u,0) \qquad X_v=(0,0,1)$$

$$X_u\cdot X_u=1 \qquad X_uX_v=0 \qquad X_vX_v=1$$

$$g_{ij}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$L=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}s=\sqrt{2}\cdot 2\pi$$

### נשים לב

- לאותו המשטח $S$ יש אינסוף פרמטריזציות שונות.
- לפרמטריזציות שונות יש תבניות יסודיות שונות.

# משטחים איזוטריים

עבור 2 משטחים $S_1$ ו$S_2$ העתקה חלקה $f:S_1\to S_2$ נקראת איזוטריה מקומים אם אורכי עקומות נשמרים תחת ההעתקה.

אם קיימת איזומטריה מקומית בין 2 משטחים $S_1$ ו$S_2$ הם נקראים איזומטריים.

### משפט

$S_1$ ו$S_2$ איזומטריים $\Leftrightarrow$ קיימות פרמטריזציות כך שלשני המשטחים אותה תבנית יסודית 1.

### דוגמה

מישור, גליל וחרוט איזומטריים, כי בשלושתם $g_{ij}=\delta_{ij}$

### סעיף ד של התרגיל

מהו אורך העקומה $\alpha(t)$ ב$\Omega$ כאשר זו נתונה עם המטריקה $\mathrm{d}s^2=2e^{2u}\mathrm{d}u^2+2e^{2v}\mathrm{d}v^2$?

**פתרון**

$$(g_{ij}) = F_1 = \begin{pmatrix} 2e^{2u} & 0 \\ 0 & 2e^{2v} \end{pmatrix}$$

$$L_\alpha = \int_0^{2\pi} \sqrt{2e^{2t}\left(1\right)^2 + 2\cdot 0 + 2e^{2t}\left(1\right)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{4e^{2t}}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} 2e^t\,\mathrm{d}t = \left. 2e^t \right|_0^{2\pi} = 2e^{2\pi}$$