בתרגיל הבית האחרון ראינו שיש "אי נעימויות" במרחב $\mathrm{AC}(I)$ אם I אינו סגור וחסום, ולכן מהיום נתמקד במקרה שבו $I=[a,b]$ סגור וחסום.

השתנות חסומה

תזכורת

אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $[a,b] \mid P$[1] ע"י הנקודות $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$, מגדירים את ההשתנות של f ביחס ל־P ע"י

$$\bigvee(f,P)=\sum_{k=1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|$$

ואת ההשתנות של f בקטע $[a,b]$ ע"י

$$T_a^b[f]:=\sup\left\{\bigvee(f,P)\middle|P\mid[a,b]\right\}$$

הגדרה

אם $T_a^b[f]<\infty$, אומרים ש־f בעלת השתנות חסומה בקטע.
מרחב כל הפונקציות בעלות השתנות חסומה יסומן $\mathrm{BV}([a,b])=\left\{f\middle|T_a^b[f]<\infty\right\}$ (Bounded Variation).
בהרצאה: $\mathrm{AC}([a,b])\subsetneq\mathrm{BV}([a,b])$.

הגדרה

אומרים שחלוקה Q היא עידון של החלוקה P, אם Q מתקבלת ע"י הוספה של מספר סופי של נקודות.

תרגיל

תהיינה $[a,b]\mid P,P^*$ חלוקות ו־P^* עידון של P. צ"ל $\bigvee(f,P)\le\bigvee(f,P^*)$.

פתרון

תחילה, נניח כי P^* מתקבלת מ־P ע"י הוספת נקודה אחת $x_{r-1}<x^*<x_r$.

$$\bigvee(f,P)=|f(x_1)-f(x_0)|+|f(x_2)-f(x_1)|+\cdots+|f(x_r)-f(x_{r-1})|+\cdots+|f(x_n)-f(x_{n-1})|=$$

$$=|f(x_1)-f(x_0)|+|f(x_2)-f(x_1)|+\cdots+|f(x_r)-f(x^*)+f(x^*)-f(x_{r-1})|+\cdots+|f(x_n)-f(x_{n-1})|\le$$

[1] כלומר P חלוקה של $[a,b]$

$$\leq |f(x_1)-f(x_0)|+|f(x_2)-f(x_1)|+\cdots+|f(x^*)-f(x_{r-1})|+|f(x_r)-f(x^*)|+\cdots+|f(x_n)-f(x_{n-1})|=$$

$$=\bigvee(f,P^*)$$

ואם P^* התקבלה מP ע"י הוספת N נקודות, חוזרים על ההוכחה הזו N פעמים.

תרגיל

תהי $P: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ חלוקה. הוכיחו כי $T_a^b[f]=\sum_{k=1}^{n}T_{x_{k-1}}^{x_n}[f]$.

פתרון

נניח כי מדובר על חלוקה בת שני קטעים(אחרת, נחזור על ההוכחה כמו מקודם) - $Q: a=x_0<c=x_1<x_2=b$ - ויש להראות $T_a^b[f]=T_a^c[f]+T_c^b[f]$.
(הערה: $\sup(f(x)+y(x))\leq\sup f+\sup g$ כאשר מודדים על אותה קבוצה - אבל כאן מדובר על אותה פונקציה עם קבוצות שונות)

$(\leq)$

$$\bigvee(f,P)\geq\bigvee(f,P\cup\{c\}) = \overbrace{|f(x_1)-f(x_0)|+\cdots+|f(c)-f(x_{m-1})|}^{=\text{Variance in partitioning of }[a,c]\leq T_a^c[f]} + \underbrace{|f(x_m)-f(c)|+\cdots+|f(x_n)-f(x_{n-1})|}_{=\text{Variance in partitioning of }[b,c]\leq T_c^b[f]}$$

יש לנו

$$\bigvee(f,P)\leq T_a^c[f]+T_c^b[f]$$

$$\sup_{P|[a,b]}\left\{\bigvee(f,P)\right\}\leq T_a^c[f]+T_c^b[f]$$

אגף שמאל הוא T_a^b. ■

$(\geq)$ יהי $\varepsilon>0$. ע"פ האיפיון של sup יש חלוקות $P_1 \mid [a,c]\,,\ P_2 \mid [c,b]$ המקיימות

$$\bigvee(f,P_1)\geq \underbrace{T_a^c[f]}_{=\sup\{\bigvee(f,P)|P|[a,c]\}} -\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\bigvee(f,P_2)\geq T_c^b[f]-\frac{\varepsilon}{2}$$

נחבר אי שוויונות לקבל

$$\bigvee(f,P_1)+\bigvee(f,P_2)\geq T_a^c-\varepsilon$$

ניתן לראות כי $P = P_1 \cup P_2$ חלוקה של $[a,b]$ ו־$\bigvee(f, P_1 \cup P_2) = \bigvee(f, P_1) + \bigvee(f, P_2)$. סה"כ

$$T_a^b[f] \geq \bigvee(f, P_1 \cup P_2) \geq T_a^c[f] + T_c^b[f] - \varepsilon$$

נשאיף $\varepsilon \to 0$ לקבל התוצאה.

תרגיל

תהי $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציית דריכלה: $I_{\mathbb{Q}}(x) = D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. הוכיחו שבכל קטע $[a,b]$(עם אורך חיובי) $T_a^b[D] = +\infty$.

פתרון

יהי N טבעי. על סמך צפיפות הרציונליים והאי־רציונליים בקטע $[a,b]$, נוכל לבנות חלוקה $P_N : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ "מתחלפת" - זאת אומרת שהנקודות הן מתחלפות בין רציונליות לאי־רציונליות לסירוגין(לפחות בלי הקצוות).

$$\bigvee(D, P_N) = \sum_{k=1}^{N} |D(x_k) - D(X_{k-1})| \geq \sum_{k=2}^{N-1} |D(x_k) - D(x_{k-1})| = \sum_{k=2}^{N-1} 1 = N-2$$

מכאן שהקבוצה $\{\bigvee(D,P) | P \mid [a,b]\}$ מכילה מספרים גדולים כרצוננו! $\Longleftarrow$

$$T_a^b[D] = \sup\left\{\bigvee(D,P)\middle| P \mid [a,b]\right\} = +\infty$$

תרגיל

הוכיחו כי הפונקציה $f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ אינה בעלת השתנות חסומה בקטע $[0,1]$.

פתרון

צריכים לתפוס את התנודות של הסינוס. מדי פעם $\sin\frac{1}{x} = \pm 1$ ואז ונוחתים על הישרים $y = \pm x$. $\sin\frac{1}{x}$ מחזירה $+1$ בנקודות $x_t = \frac{2}{\pi + 4\pi k}$, ומחזירה -1 בנקודות $y_k = \frac{2}{3\pi + 4\pi k}$.
לכל N נגדיר חלוקה

$$P_N : \frac{2}{\pi} > \frac{2}{3\pi} > \frac{2}{5\pi} > \frac{2}{7\pi} > \cdots > \frac{2}{\pi + 4\pi k} > \frac{2}{3\pi + 4\pi k} > \cdots > \frac{2}{\pi + 4\pi N} > \frac{2}{3\pi + 4\pi N}$$

$$\begin{aligned} \bigvee(f, P_N) \quad \geq \quad & \left| f\left(\frac{2}{3\pi}\right) - f\left(\frac{2}{\pi}\right) \right| + \left| f\left(\frac{2}{7\pi}\right) - f\left(\frac{2}{5\pi}\right) \right| + \cdots \\ & \cdots + \left| f\left(\frac{2}{3\pi + 4\pi k}\right) - f\left(\frac{2}{\pi + 4\pi k}\right) \right| + \cdots + \left| f\left(\frac{2}{3\pi + 4\pi N}\right) - f\left(\frac{2}{\pi + 4\pi N}\right) \right| = \end{aligned}$$

$$=\sum_{k=0}^{N}\left|f\left(\frac{2}{3\pi+4\pi k}\right)-f\left(\frac{2}{\pi+4\pi k}\right)\right|=$$

$$=\sum_{k=0}^{N}\left|\frac{2}{3\pi+4\pi k}\cdot\overbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)}^{=-1}-\frac{2}{\pi+4\pi k}\cdot\overbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}^{+1}\right|=$$

$$=\sum_{k=0}^{N}\left|\frac{2}{3\pi+4\pi k}+\frac{2}{\pi+4\pi k}\right|=\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{N}\frac{2k+1}{(4k+1)(4k+3)}\approx 16k^2$$

כאשר $N\to\infty$ מקבלים טור מתבדר(חבר של הטור ההרמוני) $\Longleftarrow$

$$\sup_{P|[0,1]}\left\{\bigvee(f,P)\right\}=+\infty$$

תרגיל

תהי $f\in\mathrm{BV}([a,b])$

א. הוכיחו כי לכל $x_0\in(a,b)$, קיימים הגבולות החד צדדיים$\lim_{x\to x_0^+}f(x)$, $\lim_{x\to x_0^-}f(x)$.(מכאן שלפונקציות בעלות השתנות חסומה אין אי רציפות מהסוג השני).

ב. הוכיחו כי קבוצת נקודות אי הרציפות של f היא בת מניה.

פתרון

ע"פ "משפט הפירוק של ז'ורדן" ניתן לרשום $f=g-h$ כאשר g,h עולות.

א. ידוע שלפונקציות עולות קיימים הגבולות החד צדדיים, ולכן המספרים $\lim_{x\to x_0^+}g(x)$ $\lim_{x\to x_0^-}g(x)$ $\lim_{x\to x_0^+}h(x)$ $\lim_{x\to x_0^-}h(x)$ קיימים כולם, ומאריתמטיקה של גבולות גם לf יש גבולות חד צדדיים בכל נקודה.

ב. ידו מאינפי' שקבוצת נקודות אי הרציפות של פונקציה מונוטונית היא בת מנייה. קבוצת נקודות אי הרציפות של f מוכלת באיחוד של נקודות אי הרציפות של g וh.

תרגיל

תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

1. f רציפה בהחלט, $f'(x)=\{0,1\}$ כב"מ($\mathrm{d}m$) ו$f(0)=0$.
2. קיימת קבוצה $A\subseteq[0,1]$ מדידה לבג כך ש$f(x)=m(A\cap(0,x))$

פתרון

$1 \Longrightarrow 2$ נגדיר $A := \{x \in [0,1] | f'(x) = 1\}$. בגלל ש$f$ רציפה היא מדידה לבג, ובתרגול שעבר ראינו שגם הנגזרת f' מדידה לבג, ומכאן שהקבוצה A מדידה($A = (f')^{-1}[\{1\}]$). עכשיו בגלל שf רציפה בהחלט, היא מקיימת את נוסחת ניוטון־לייבניץ $\forall_{x\in[0,1]} \int_0^x f' \,\mathrm{d}m = f(x) - f(0)$.

$$f(x) = \cancel{f(0)} + \int_0^x f' \,\mathrm{d}m = \int_0^x f' \,\mathrm{d}m$$

$$f(x) = \int_0^x f' \,\mathrm{d}m = \int_0^x I_A \,\mathrm{d}m = \int_0^1 I_{A\cap(0,x)} \,\mathrm{d}m = m(A \cap (0,x))$$

$2 \Longrightarrow 1$ $f(x) = m(A \cap (0,x)) = \int_0^x I_A \,\mathrm{d}m$, ומכאן f רציפה בהחלט(הכללת לבג חלק א'. אינטגרל לא מסויים הוא פונקציה רציפה בהחלט). ע"פ הכללת לבג, **כב"מ** $f'(x) = I_A(x) \in \{0,1\}$, וברור כי $f(0) = 0$

$\blacksquare$

משפט

אם f רציפה בהחלט עם נגזרת חסומה(כב"מ) $|f'(x)| \leq M$ אזי היא מקיימת את תנאי ליפשיץ.

הוכחה

$$|f(y) - f(x)| = \left|\int_x^y f' \,\mathrm{d}m\right| \leq \int_x^y |f'| \,\mathrm{d}m \leq \int_x^y M \,\mathrm{d}m = M(y-x)$$