תרגיל בית 6 מבוא לחוגים ומודולים
88-212 סמסטר ב' תשע"ז

הוראות זכרו למלא ולהגיש את הדו"ח.

שאלה 1 (רענון). יהי R חוג.

א. יהי $f(x) \in R[[x]]$. הוכיחו כי $1 - x \cdot f(x)$ הוא איבר הפיך בחוג $R[[x]]$.

ב. הוכיחו ש-$f(x) \in R[[x]]$ הפיך אם ורק אם המקדם החופשי שלו הוא הפיך ב-R. השוו את התוצאה לשאלה 7 בתרגיל בית 3, שם נדרשנו למקדמים שהם נילפוטנטיים (פרט למקדם החופשי), ולמה כאן לא צריך אותם.

ג. הציגו את חוג טורי לורן $R((x))$ כמיקום של $R[[x]]$.

שאלה 2. יהיו $x, y \in \mathcal{O}_D$.

א. הוכיחו שאם $x \sim y$ אז $N(x) = \pm N(y)$.

ב. מצאו איברים x, y המקיימים $N(x) = N(y)$, אבל הם לא חברים ולא צמודים זה לזה.

שאלה 3. יהי R חוג. נגדיר עבורו פונקציית נורמת אידאלים לפי $N(0) = 0$ ולכל $0 \neq a \in R$, $N(a) = |R/\langle a \rangle|$.

א. הוכיחו שאם R תחום שלמות, אז N היא פונקציה כפלית (בחשבון עוצמות).

ב. מצאו דוגמת נגד לסעיף הקודם כאשר R אינו תחום שלמות. רמז: מספיק לקחת R סופי.

ג. רשות: הראו שעבור $R = \mathcal{O}_D$ הפונקציה הזו מתלכדת עם הנורמה שפגשנו בכיתה.

שאלה 4. יהי $\alpha \in \mathcal{O}_D \setminus \mathbb{Z}$. הוכיחו או הפריכו: אם $\alpha | n$ עבור $n \in \mathbb{Z}$, אז $N(\alpha) | n$.

שאלה 5. הוכיחו $\mathbb{Z}[i]/\langle 3+i \rangle \cong \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ והסיקו כי $3 + i \in \mathbb{Z}[i]$ אינו ראשוני.
האם $7 \in \mathbb{Z}[i]$ הוא ראשוני?

שאלה 6. הראו שבפירוקים $\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-6} = -2 \cdot 3$ בחוג $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ כל הגורמים הם אי פריקים, אינם חברים, ואינם ראשוניים.

שאלות אתגר לשעות הפנאי

שאלה 7. בחרו שפת תכנות כרצונכם וממשו בה בעצמכם את חוגי השלמים הריבועיים. ניתן להעזר בהדרכה הבאה, שמנוסחת לתכנות מונחה עצמים (אבל אפשר להשתמש בפרדיגמות אחרות):

א. ממשו מחלקה שמקבלת מספר שלם D ומייצגת את $\mathcal{O}_D$.

ב. ממשו לאובייקטים במחלקה מתודות לארבע פעולות חשבון, לנורמה ולעקבה.

ג. ממשו לאובייקטים מתודה לפעולת החזקה. עשו שימוש בחישוב חזקה בעזרת ריבועים או שיטה יעילה אחרת. כאן כדאי להוסיף מתודות פשוטות לבדיקה האם מספר הפיך, ולהוסיף למחלקה פונקציות שמחזירות את איבר האפס ואיבר היחידה.

ד. ממשו פונקציה למציאת פתרון יסודי למשוואת פל. זה לא טריוויאלי בכלל כאשר רוצים שהפונקציה תהיה יעילה ככל הניתן. אפשר להתחיל בקריאת מאמר הסקירה "לפתור את משוואת פל" מאת הנדריק לנסטרה, ולהתחיל עם השיטה שנעזרת בקירובים רציונליים על ידי שברים משולבים של $\sqrt{D}$ (מי שלא מכיר לא צריך לפחד, במיוחד כי כבר נתקלנו באלגוריתם אוקלידס).

ה. נסמן ב-α_D את הפתרון היסודי של משוואת פל עבור D. בדקו את התוכנה שלכם לערכים הבאים:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 3 + 2\sqrt{2} & \alpha_{14}^7 &= 1339240529 + 357927087\sqrt{14} \\ \alpha_{19} &= 107 + 39\sqrt{19} & \alpha_{105}^5 &= 1852321001 + 180768020\sqrt{105} \\ \alpha_5^2 &= 161 + 72\sqrt{5} & \alpha_6^{212} &= 5809\ldots3201 + 2371\ldots7880\sqrt{6} \end{aligned}$$

שאלה 8. הוכיחו את ההכלות בשרשרת הבאה

$$\mathbb{Q}[[x]][y] \subsetneq \mathbb{Q}[y][[x]] \subsetneq \mathbb{Q}[[x]][[y]] \subsetneq \mathbb{Q}[[y]]((x)) \subsetneq \mathbb{Q}((x))[[y]]$$

והראו שכל ההכלות הן אמיתיות. רמז: האיברים בחוגים האלו הם מן הצורה $\sum a_{ij}x^iy^j$, וכדאי למצוא מגבלות על האוסף $\left\{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \,\middle|\, a_{ij} \neq 0\right\}$ לאיברים שונים.

בהצלחה!