אנליזה מודרנית תש"ף - תרגיל 11

להגשה עד 4.2.20

שאלה 1

הוכיחו כי אם $r < p$ אז $\ell^r \subset \ell^p$.

שאלה 2

נגדיר $F = \{(a_n) \subseteq \mathbb{R} \mid \sup_n n\,|a_n| < \infty\}$. הוכיחו או הפריכו:

1. F הוא תת־מרחב לינארי של ℓ^2.
2. הקבוצה $F \cap \ell^2$ סגורה ב־ℓ^2.

שאלה 3

נגדיר $E = \left\{(x_n) \in \ell^2 \,|\, \forall n \geq 1 : x_{2n-1} = x_{2n}\right\}$.

1. הוכיחו כי E הוא תת־מרחב סגור של ℓ^2.
2. מצאו את $E^\perp$.
3. יהי $x \in \ell^2$. מצאו את ההיטל האורתוגונלי של x על E.

שאלה 4

נזכיר כי $\ell^\infty = \{(x_n) \mid \sup_n |x_n| < \infty\}$, זהו מרחב נורמי כאשר $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$.
הראו שאם נשרה את נורמת ℓ^∞ על ℓ^1, נקבל מרחב שאינו שלם.