

## תרגיל בית 10 במבנים אלגבריים 89-214 סמסטר א' תש"ף

**שאלה 1** (חימום). מבלי לעשות אף פעולת חיבור או כפל, הסבירו למה הקבוצה הבאה ב- $\mathbb{Z}_2^4$  אינה קוד לינארי:

$$\{(0110), (1001), (1010), (1100)\}$$

**שאלה 2.** נקודד את  $\mathbb{Z}_2^2$  לקוד ל- $\mathbb{Z}_2^8$  לפי

$$\begin{array}{ll} (00) \mapsto (00000000) & (01) \mapsto (01010101) \\ (10) \mapsto (10101010) & (11) \mapsto (11111111) \end{array}$$

כלומר חזרנו ארבע פעמים על כל וקטור. קוד מסוג כזה נקרא קוד חזרה.

א. מצאו את המרחק המינימלי  $d_{\min}$  של הקוד.

ב. מצאו את המטריצה היוצרת התקנית  $G$  ואת מטריצת בדיקת הזוגיות הקנונית  $H$  של הקוד. ודאו קודם שאתם יודעים למה זה בכלל קוד לינארי.

**שאלה 3.** יהיו  $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{Z}_2^n$  שני קודים עם מרחקים מינימליים  $d_1, d_2$ , בהתאמה.

א. הוכיחו על ידי מציאת דוגמה כי ייתכן שמתקיים  $|C_1| = |C_2|$ , אבל  $d_2 < d_1$ .

ב. הוכיחו שאם  $C_1 \subseteq C_2$ , אז  $d_2 \leq d_1$ .

**שאלה 4.** נתבונן במטריצה הבאה

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

א. חשבו את  $d_{\min}$  של הקוד הלינארי  $C$  שמגדיר מרחב האפסים של  $H$ .

ב. בדקו האם המילים הבאות הן מילות קוד של  $C$ , ואם לא הניחו שאירעה שגיאה אחת ותקנו אותה:

$$v_1 = (0110100) \quad v_2 = (1000100) \quad v_3 = (1011100) \quad v_4 = (1010111)$$

**שאלה 5.** לכל זוג פולינומים  $f(x), g(x)$  בצעו חלוקה אוקלידית של פולינומים ומצאו פולינומים  $q(x), r(x)$  כך ש- $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$  עם  $\deg r(x) < \deg g(x)$ .

א. בחוג  $\mathbb{Q}[x]$   $f(x) = x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ ,  $g(x) = x^2 + 5x - 1$ .

ב. בחוג  $\mathbb{Z}_2[x]$   $f(x) = x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ ,  $g(x) = x^2 + 5x - 1$ .

ג.  $k \in \mathbb{N}$  כאשר  $\mathbb{Z}_2[x]$  בחוג  $f(x) = x^{4k}$ ,  $g(x) = x^4 + 1$ .  
רמז: בחישוב סכום סדרה הנדסית מוכיחים  $(q-1)|(q^k-1)$ .

**שאלה 6.** יהי  $g(x) = x^3 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ . נגדיר לפי קוד פולינומי  $C$  מ- $\mathbb{Z}_2^6$  ל- $\mathbb{Z}_2^9$  (כלומר כאן  $n = 9$  ו- $k = 6, m = 3$ ).

א. הוכיחו או הפריכו האם  $C$  הוא קוד ציקלי.

ב. קודדו את הוקטור  $x = (110011)$  למילת קוד ב- $C$ .

ג. בדקו מי מבין המילים הבאות היא מילת קוד של  $C$ :

$$v_1 = (110011101) \quad v_2 = (000101101) \quad v_3 = (110010110)$$

בהצלחה!