מבנים אלגבריים למדעי המחשב
תרגיל 8

נא לכתוב על התרגילים שם, ת.ז. ומספר קבוצת תרגול!

1. א) נתונה התמורה הבאה ב- S_8 : $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 8 & 3 & 1 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

(i) רשמו אותה כמכפלת מחזורים זרים, ומצאו את הסדר שלה.

(ii) האם a שייכת ל- A_8?

(iii) מה הסדר של a^{14}?

2. א) הראו ש- $V = \{Id, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$ היא תת-חבורה נורמלית של A_4.

ב) הוכיחו ש- A_4/V היא ציקלית.

3. תהי $\alpha = (1\ 2\ 4)$ ב- S_4. הוכיחו שהקבוצה הבאה היא תת-חבורה של S_4 ומצאו את הסדר שלה: $\{t \in S_4 : t\alpha = \alpha t\}$.

הכללה של משפט קיילי:

4. תהי G חבורה סופית ו- $H \le G$. לכל $g \in G$ נגדיר $\phi_g : G/H \to G/H$ המוגדרת ע"י $\phi_g : kH \mapsto gkH$.

א) הראו ש- ϕ_g היא תמורה על אברי G/H (כלומר ϕ_g היא פונקציה חח"ע ועל)

ב) נגדיר העתקה $\Phi : G \to S_{G/H}$ ע"י $\Phi : g \mapsto \phi_g$ (כאשר הכוונה ב- $S_{G/H}$ היא שזו חבורת התמורות על איברי G/H).

i. הוכיחו ש- Φ הומומורפיזם.

ii. הראו ש- $Ker\Phi \subseteq H$

ג) הסיקו שכל תת-חבורה H מכילה תת-חבורה נורמלית שהאינדקס שלה ב- G הוא לכל היותר $[G:H]$!.

ד) נסחו את הטענה שהוכחתם בתרגיל זה עבור $H = 1$

5. א. הראו שאברי A_5 נמצאים ב-5 מחלקות צמידות וחשבו את מס' האיברים בכל אחת ממחלקות הצמידות. ודאו שקיבלתם את כל אברי A_5.

ב. ידוע שעבור כל חבורה G כל תת-חבורה נורמלית שלה היא איחוד של מחלקות צמידות. הראו שניתן להשתמש בנתונים על גודל מחלקות הצמידות (ובמשפט לגרנז') כדי להראות ש- A_5 פשוטה (ז"א – שאין ל- A_5 תת-חבורה נורמלית לא טריוויאלית)

6. הוכיחו שהמרכז של $(1234)(567)$ ב S_7 איזומורפי ל $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$

בהצלחה