בדידה תרגול 6 - יחסי סדר

22 ביולי 2020

1 מינימלי, מקסימלי, קטן ביותר, גדול ביותר

תרגילים:

1. הגדרה: תהיינה A, B קבוצות, $R \subseteq A \times B$ יחס. היחס ההפוך הוא יחס מ־B ל־A ומוגדר להיות:

$$R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}$$

תהא (A, R) קס"ח. הוכיחו ש־ (A, R^{-1}) קס"ח.
פתרון: רפלקסיביות: יהי $a \in A$. R סדר, ולכן aRa ולכן $aR^{-1}a$.
אנטי־סימטריות: נניח $aR^{-1}b \wedge bR^{-1}a$, לכן $bRa \wedge aRb$, ומכיון ש־R יחס סדר נקבל $b = a$ כדרוש.
טרנזיטיביות: נניח $aR^{-1}b \wedge bR^{-1}c$, לכן נקבל $bRa \wedge cRb$, ומכיון ש־R סדר הוא טרנ' ולכן cRa ולכן $aR^{-1}c$.

2. תהא (A, R) קס"ח, ויהי $x \in A$. הוכיחו שאם x מינימלי ב־(A, R) אז הוא מקסיימלי ב־ (A, R^{-1}).
פתרון: נתון x מינ' ביחס ל־R. ניזכר בהגדרת מקס': איבר x מקס' אם $\forall a :: (xSa) \Rightarrow x = a$. לכן יהי $a \in A$ כך ש־ $xR^{-1}a$, לכן aRx, וכיון ש־ x מינ' ביחס לR נקבל שאין מישהו משמאלו, ולכן $a = x$.

3. הוכיחו או הפריכו: בכל קס"ח $(A, \leq)$ עבור A סופית ולא ריקה יש איבר מינימלי.
פתרון: נכיח באינדוקציה על גודל הקבוצה $|A|$. בסיס: עבור $|A| = 1$ אכן $\leq = I_A$, ואז האיבר היחיד בקבוצה הוא מינימלי.
נניח נכונות לכל $1 \leq k < n$ ונוכיח עבור n. תהי $|A| = n$, ו$(A, \leq)$ קס"ח. ניקח $a \in A$ ונתבונן בקבוצה $A' = A \setminus \{a\}$. נשים לב (תוכיחו בעצמכם) ש $(A', \leq \cap (A' \times A'))$ קס"ח עם $n - 1$ איברים. לכן מהנחת האינדוקציה יש ב־A' איבר מינ', נסמנו a'.

כעת, אם $a' \nleq a$ אז a' מינימלי גם ב־A כי: נניח $b \leq a'$, אז מההנחה $a \neq b$, ולכן $b \in A'$, וכיון ש־a' מינימלי ב־A' נקבל $b = a'$.
אם $a \leq a'$ אז a מינימלי כי: אם $b \leq a$ אם $a = b$ סיימנו. אחרת, מטרנזיטיביות $b \leq a'$, ולכן כיון ש־ $b \in A'$ נקבל $b = a'$ (כי a' מינ' שם), ולכן בסה"כ: $a \leq b \wedge b \leq a$ ומאנטי־סימטריות נקבל $a = b$.

4. הוכיחו או הפריכו: $(A, \leq)$ קס"ח. אם x מינ' יחיד אז x קטן ביותר. ראיתם בהרצאה.

5. תהא A קבוצה ו־$\leq$ יחס סדר לינארי על A. כלומר, $\forall a, b \in A : a \leq b \vee b \leq a$. יש קוראים לו גם סדר משווה. הוכיחו או הפריכו: אם x מינימלי אז x קטן ביותר.
פתרון: הוכחה: נתון ש־x מינ'. צ"ל: x קטן ביותר. יהי $a \in A$ צ"ל: $x \leq a$.
מהעובדה ש־$\leq$לינארי נקבל $a \leq x \vee x \leq a$. נחלק למקרים:
אם $a \leq x$ אז ממינימליות של x נקבל $x = a$, ולכן $x \leq a$ (היחס הוא כמובן רפלקסיבי).
אם $x \leq a$ אז סיימנו.

6. נראה קצת דיאגרמות עם מינ' מקס' קטן ביויתר גדול ביותר: וראינו שהיחס היחיד על קבוצה A בו כל איבר מקסימלי הוא I_A.

2 חסמים

הגדרות: $(A, \leq)$ קס"ח. $B \subseteq A$.

- איבר $a \in A$ ייקרא חסם מלעיל (מלרע) אם לכל $b \in B$ מתקיים $b \leq a$ ($a \leq b$).
- איבר $a \in A$ ייקרא חסם עליון (תחתון) של B, ויסומן $\sup(B)$ ($\inf(B)$) אם הוא הקטן (הגדול) ביותר מבין חסמי המלעיל (המלרע), אם בכלל קיים כזה.

תרגילים:

1. מצאו ת"ק $X \subseteq P(\mathbb{N})$, שיש בקס"ח $(X, \subseteq)$ ת"ק ללא חסם עליון.
פתרון: ניקח $X = P(\{1,2,3\}) \setminus \{\{1,2,3\}\}$. ואז בקס"ח $(X, \subseteq)$ לתת הקבוצה $X \subseteq X$ אין חסם עליון כי אין לה חסמי מלעייל: אם בשלילה יש $Y \in X$ כך ש־ $\forall Z \in X : Z \subseteq Y$, אז בפרט $\{1\}, \{2\}, \{3\} \subseteq Y$ (כי $\{1,2,3\} \subseteq Y$, ולכן $1, 2, 3 \in Y$) בסתירה לכך שלכל $Y \in X$ מתקיים: $Y \nsubseteq \{1,2,3\}$.

2. תהא $(A, \leq)$ קס"ח. $B \subseteq A$ כך שקיים $\sup(B)$ וכן ב־B יש קטן ביותר (ובפרט יש $\inf(B)$). הוכיחו או הפריכו: לכל $C \subseteq B$ יש $\sup(C)$.
פתרון: הפרכה: נתבונן בקס"ח $(\mathbb{Q}, \leq)$. וניקח את $B = [0,2] \cap \mathbb{Q}$. כמובן $\sup(B) = 2$. נגדיר: את $C = \{1, 1.4, 1.41, 1.414, \ldots\}$, כלומר, $a \in C$ הצורה העשרונית שלו מהווה תחיליית של הצורה העשרונית של $\sqrt{2}$. טענה: לא קיים $\sup(A)$, כי אמנם $\sqrt{2}$

הוא הקטן ביותר מבין הממשיים שגדול מכל איברי A, אבל הוא לא רציונאלי, ואין קטן ביותר מבין כל הרציונאליים המהווים חסמי מלעיל של A.

3. תהא A קובצה. נסמן ב־ $\mathbb{O}$ את קבוצת כל יחסי הסדר על A.

(א) הוכיחו שאם R יחס סדר לינארי על A אז R מקסימלי ב $(\mathbb{O}, \subseteq)$

לפני הפתרון נראה דוג': $A = \{1,2,3\}$. אז למשל $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2)\}, S = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(1,3)\}$. $R \subseteq S$

פתרון: R יחס סדר לינארי הכוונה: לכל $a, b \in A$ מתקיים אחד מהבאים: $aRb \vee bRa$. כעת נניח $S \in \mathbb{O}$ כך ש־ $R \subseteq S$ צ"ל: $R = S$, ולכן נראה $S \subseteq R$: יהי $(a,b) \in S$. מלינאריות R ידוע $aRb \vee bRa$.

אם אכן aRb סיימנו.

אם bRa אז מההכלה $R \subseteq S$ נקבל $(b,a) \in S$ ומאנטי־סימטריות של S נקבל $a = b$ ולכן $(a,b) = (a,a) \in R$.

הערה: תהי $(A, \leq)$ קס"ח. ניקח $\emptyset \subseteq A$. האם יש $\sup(\emptyset), \inf(\emptyset)$? חסם מלעיל של הריקה זה איבר $a \in A$ שלכל $b \in \emptyset$ מתקיים: $b \leq a$. זה קורה לכל $a \in A$ (באופן ריק). ולכן כולם חסמי ממלעיל של הריקה, ובדומה כולם חסמי מלרע של הריקה. לכן כדי שיהיה חסם עליון לריקה, צריך שיהיה קטן ביותר מבין חסמי המלעיל, כלומר, צריך שלקבוצה A יהיה איבר קטן ביותר (בדומה יש חסם עליון לריקה אמ"ם יש גדול ביותר).