

מתמטיקה בדידה – תרגיל 6

שאלה 1

הוכיחו בעזרת הלמה של צורן את עיקרון המקסימום של האוסדורף: תהי (X, \leq) קבוצה סדורה חלקית. אזי כל שרשרת ב- (X, \leq) מוכלת בשרשרת מקסימלית.

[תזכורת: שרשרת ב- (X, \leq) היא תת קבוצה $Y \subseteq X$ כך שלכל $a, b \in Y$ מתקיים $a \leq b$ או $b \leq a$. שרשרת נקראת מקסימלית אם היא לא מוכלת באף שרשרת למעט עצמה.]

שאלה 2

יהי $\epsilon \in \mathbb{R}$, $0 < \epsilon$. תת קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ תיקרא ϵ -דלילה אם לכל $a, b \in A$ שונים מתקיים $|a - b| \geq \epsilon$.

- הוכיחו כי כל קבוצה ϵ -דלילה A מוכלת בקבוצה ϵ -דלילה מקסימלית ביחס להכלה. [הדרכה: תהי X קבוצת כל תתי הקבוצות ה- ϵ -דלילות של \mathbb{R} המכילות את A . אזי (X, \subseteq) היא קבוצה סדורה חלקית. השתמשו בלמה של צורן כדי להראות כי קיים בה איבר מקסימלי.]
- תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה ϵ -דלילה מקסימלית ביחס להכלה. הוכיחו כי לכל $b \in \mathbb{R}$ קיים $a \in A$ כך ש- $|a - b| < \epsilon$.
- הראו כי כל קבוצה ϵ -דלילה היא בת מנייה. (הערה: הסעיף הזה לא קשור ללמה של צורן.)

שאלה 3

תהי A קבוצה ויהי R_0 יחס סדר על A .

- הוכיחו כי קיים יחס סדר מקסימלי (ביחס להכלה) המכיל את R_0 . [הדרכה: תהי X קבוצת יחסי הסדר על A המכילים את R_0 . השתמשו בלמה של צורן על (X, \subseteq) .]
- (*) הוכיחו כל יחס סדר מקסימלי (ביחס להכלה) על A הוא יחס סדר מלא. הסיקו כי כל יחס סדר על A מוכל ביחס סדר מלא.

שאלה 4

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F ותהי $S \subseteq V$ קבוצה הפורשת את V . בשאלה זו נוכיח ש- S מכילה בסיס. [באלגברה לינארית הוכחתם את זה כאשר S קבוצה סופית, אבל אנחנו נוכיח את זה עבור כל S !]

לפי עיקרון הסדר הטוב, קיים סדר טוב \leq על S . עבור כל $v \in S$ נגדיר $S_{\leq v} = \{s \in S \mid s \leq v\}$ ו- $S_{<v} = S_{\leq v} \setminus \{v\}$ (כלומר, $S_{<v}$ היא קבוצת הוקטורים שקטנים ממש מ- v). נגדיר גם את $B = \{v \in S \mid v \notin \text{span}(S_{<v})\}$.

- הוכיחו כי B קבוצה בת"ל. (כאן אין צורך בהנחה ש- (S, \leq) קבוצה סדורה היטב).
- הוכיחו כי לכל $v \in S$ מתקיים $v \in \text{span}(B \cap S_{\leq v})$.
- [הדרכה: נגדיר $X = \{v \in S \mid v \notin \text{span}(B \cap S_{\leq v})\}$ ונניח בשלילה ש- X לא ריקה. היות ו- (S, \leq) סדורה היטב, קיים ב- X איבר קטן ביותר, שנסמנו ב- x . הוכיחו כי $x \in \text{span}(B \cap S_{\leq x})$ והגיעו לסתירה.]
- הסיקו כי $\text{span}(B) = V$ ולכן B בסיס.
- (*) הראו ע"י דוגמא כי $\text{span}(B) = V$ לא בהכרח מתקיים אם (S, \leq) אינה סדורה היטב.

שאלה 5 ("קצרים" – נמקו בקצרה את הפיתרון)

- א. בכמה דרכים ניתן לסדר n בנים (זהים) ו- m בנות (זהות) בשורה?
- ב. בכמה דרכים ניתן לסדר 3 כדורים אדומים, 2 כדורים כחולים ו-4 כדורים ירוקים בשורה?
- ג. כמו סעיף ב, אבל כאשר אסור ששני הכדורים הכחולים יהיו סמוכים זה לזה.
- ד. בכמה דרכים ניתן לשים n תוכים זהים ב- k כלובים שונים? (כלוב יכול להכיל כל מספר של תוכים כולל 0). [רמז: נסו להמיר את הבעיה לסעיף א ע"י הוספת "חוצצים" בין הכלובים].
- ה. בסופרמרקט יש k קופות (שונות). בכמה דרכים ניתן לסדר n אנשים שונים בתור לקופות? (תור יכול להיות ריק. יש חשיבות לסדר של האנשים בתור.)
 - ו. כמו סעיף ה, אבל כאשר בכל תור יש לפחות איש אחד ($n \geq k$).
 - ז. כמה פונקציות יש מקבוצה בת k איברים לקבוצה בת n איברים?
 - ח. כמה פונקציות חח"ע יש מקבוצת יחסי הסדר המלאים על קבוצה בת n איברים אל קבוצה בת m איברים?
 - ט. תהי A קבוצה בת n איברים, B קבוצה בת m איברים ו- $f: A \rightarrow B$ פונקציה חח"ע ($m \geq n$). כמה פונקציות הופכיות משמאל יש ל- f ?
 - י. בכמה דרכים ניתן לבחור זוג סדור של שני מספרים בין 1 ל-100 (כולל) שסכומם מתחלק ב-3?
 - יא. כמו סעיף י, אבל כאשר אין משמעות לסדר של המספרים.
 - יב. כמה תתי קבוצות בגודל 3 או יותר יש לקבוצה עם n איברים ($3 \leq n$)?
 - יג. תהי A קבוצה עם n איברים, B קבוצה עם m איברים ונניח ש- $A \cap B = \emptyset$. כמה תתי קבוצות של $A \cup B$ מכילות לפחות איבר אחד מ- A ולפחות איבר אחד מ- B ?
 - יד. כמו סעיף יג, כאשר $k = |A \cap B|$.
 - טו. (*) בכמה דרכים ניתן לסדר את המספרים $\{1, 2, \dots, n\}$ בשורה כך ש-1 מופיע משמאל ל-2?

שאלה 6

הוכיחו את אקסיומת הבחירה בעזרת עיקרון הסדר הטוב.

[הדרכה: יהי $\{Y_i\}_{i \in I}$ אוסף קבוצות לא ריקות. נגדיר $X = \cup_{i \in I} Y_i$. השתמשו בעיקרון הסדר הטוב כדי לקבל יחס סדר מלא \leq על X כך ש- (X, \leq) סדורה היטב. העזרו בתכונות של \leq כדי לבנות* פונקציה $f: I \rightarrow X$ כך ש- $f(i) \in Y_i$ לכל $i \in I$].

*ללא שימוש באקסיומת הבחירה!