# תרגיל 3 בפונקציות מרוכבות

1. מצאו את כל הנקודות שבהן הפונקציות הבאות גזירות:

   (א) $f(z) = x^3 + iy^3$

   (ב) $f(z) = z + \mathrm{Re}(z)$

   (ג) $f(z) = x^3 + y^5$

2. תהי $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות ונגדיר $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ לפי

$$f(z) = u(x+y) - iu(x-y)$$

   הוכיחו כי $f$ גזירה על הציר הממשי (ציר $x$)

3. מצאו פונקציה $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ שגזירה אך ורק בנקודות $(1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)$.
   רמז: אם $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ אפשר לנסות לחפש $u, v$ מהצורה

$$u(x,y) = u_1(x) + u_2(y), \quad v(x,y) = v_1(x) + v_2(y)$$

4. תהי $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ פונקציה הגזירה בכל נקודה ב $\mathbb{C}$ המקיימת כי בכל נקודה

$$u^2 - v^2 = c$$

   כאשר $c$ קבוע כלשהוא, הוכיחו כי $f$ קבועה.
   רמז: הגדירו $g(z) = (f(z))^2$

5. מצאו את כל הנקודות $z \in \mathbb{C}$ שבהן $f(z) = \overline{z}e^{-17z^2}$ גזירה.

6. נניח כי $f(z)$ גזירה בעיגול $\{z \mid |z| < R\}$ הוכיחו כי גם $\overline{f(\overline{z})}$ גזירה שם.

7. תהי $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ גזירה בתחום $D$ בנוסף נניח ש $u, v$ גזירות פעמיים ברציפות (בהמשך הקורס נראה שזה תנאי מיותר) ונניח שהפונקציה

$$g(x,y) = |f|^2 = u^2 + v^2$$

   מקיימת

$$g_{xx} + g_{yy} = 0$$

   הוכיחו כי $f$ קבועה ב $D$.