1 רואים מייד ש

$$\int\limits_{\gamma} \sin z \mathrm{d}z = -\cos z\Big|_{\gamma(-\pi)}^{\gamma(1)} = -\cos z\Big|_{-1}^{-1} = 0$$

למעשה, זה נובע מכך שהאינטגרל על מסילה סגורה (חלקה למקוטעין) של פונקציה אנליטית (לפחות בפנים המסילה) הוא 0.

לכן נותר לחשב את

$$\int\limits_{\gamma} \overline{z} \mathrm{d}z$$

נפצל אותו לפי שני הקטעים של המסילה ונקבל

$$\int\limits_{\gamma} \overline{z} \mathrm{d}z = \int\limits_{-\pi}^{0} e^{-it} e^{it} i \mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{1} (1-2t)(-2) \mathrm{d}t = it\Big|_{-\pi}^{0} + t - t^2\Big|_{0}^{1} = i\pi$$

2. ע"י הזהות $\frac{w^3-8}{w-2}=w^2+2w+4$ מקבלים שהאינטגרנד הוא $\bar{z}^2+2\bar{z}+4$. על הציר המדומה,

$\bar{z}=-z$ והאינטגרל שם הוא $-1-\frac{11}{3}i$ $\int_i^0\left(4-2z+z^2\right)dz=4z-z^2+\frac{z^3}{3}\Big|_i^0=-\left(4i+1-\frac{i}{3}\right)=-1-\frac{11}{3}i$.

על הקטע הממשי $\bar{z}=z$ והאינטגרל עליו הוא

$$\int_0^1\left(z^2+2z+4\right)dz=\frac{z^3}{3}+z^2+4z\Big|_0^1=\frac{1}{3}+1+4=\frac{16}{3}.$$

האינטגרל הכולל הוא הסכום של השניים: $\frac{13}{3}-\frac{11}{3}i$

3. א. פשוט לראות כי אורך המסילה הוא $L=2+\pi$. האינטגרנד בערך מוחלט הוא
$\left|e^z-\overline{e^z}\right|=\left|2i\,\mathrm{Im}\left(e^z\right)\right|=\left|2ie^x\sin y\right|=2e^x\left|\sin y\right|\le 2e^x$. במסילה שלנו x יכול להיות לכל היותר
1, ולכן $e^x\le e$. מכאן ש- $M=\max\limits_{z\in\gamma}\left|e^z-\overline{e^z}\right|\le 2e$. בסה"כ האינטגרל חסום ע"י

$$ML=2\left(\pi+2\right)e$$

ב. קל לראות כי אורך המסילה הוא $L=\pi+2$. האינטגרנד בערך מוחלט (על המסילה) הוא
$\left|\dfrac{2-z}{2+\overline{z}}\right|\le\dfrac{2+|z|}{\left|2-|\overline{z}|\right|}\le\dfrac{3}{1}=3$. כלומר $M\le 3$. בסה"כ $ML\le 3\pi+6$.

4. א. משתמשים בנוסחת קושי עם $f(z)=(z+1)^7$ ומקבלים $256\pi i$

ב. משתמשים בנוסחת קושי עם $f(z)=e^z$ ומקבלים $2\pi i$

ג. קודם כל משתמשים בשברים חלקיים $\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{2i}\frac{1}{z-i}-\frac{1}{2i}\frac{1}{z+i}$. לאחר מכן אפשר להפעיל את נוסחת קושי פעמים עם הפונקציה הקבועה $f(z)\equiv 1$. האינטגרל יוצא אפס.

ד. אין כאן מסלול סגור. אפשר לחשב ישירות. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{(it)^2-1}idt=-i\int_{-1}^{1}\arctan(t)\,dt=0$

5. ע"פ נוסחת קושי ערך האינטגרל הוא $2\pi i$. מצד שני, חישוב באמצעות פרמטריזציה נותן

$2\pi i = \int_0^{2\pi} \frac{e^{k\exp(i\theta)}}{e^{i\theta}} ie^{i\theta}d\theta = i\int_0^{2\pi} \left(e^{k\cos\theta}\cos\left(k\sin\theta\right) + ie^{k\cos\theta}\sin\left(k\sin\theta\right)\right)d\theta$. ע"י השוואת

החלק הממשי והחלק המדומה מקבלים את הדרוש.

6. ע"י נוסחת קושי רואים שבסביבת הנקודה $z=1+i$ מתקיים $f(z)=2\pi i\left(3z^2+7z+1\right)$ (בגלל שהנקודה בתוך העיגול $|z|<3$). מכאן שהנגזרת היא

$$f'(1+i)=2\pi i\left(6(1+i)+7\right)=2\pi i(13+6i)=-12\pi+26\pi i\ .$$

6. שטויות במיץ. אם ניקח את $f(z)=z$ עם $\gamma(t)=it$ עבור $0\leq t\leq 1$ אז

$$\int_{\gamma} z\mathrm{d}z=\int_{0}^{1} it\cdot i=-\frac{1}{2}$$

ו

$$\int_{\gamma}\mathrm{Re}(z)\mathrm{d}z=0$$

ולכן השוויון לא מתקיים.