בדידה למורים תרגיל 6

1. יהיו $A=\{4,7,3\}, B=\{1,8\}$. מצאו את כל הפונקציות האפשריות מA לB.
פתרון: יש 8 פו, אפשריות.
פונקציה ראשונה:
$f(4)=f(7)=f(3)=1$.
פונקציה שניה:
$f(4)=f(7)=f(3)=8$
פונקציה שלישית:
$f(4)=f(7)=1, f(3)=8$
פונקציה רביעית:
$f(4)=f(7)=8, f(3)=1$
פונקציה חמישית:
$f(4)=1, f(7)=f(3)=8$
פונקציה שישית:
$f(4)=8, f(7)=f(3)=1$
פונקציה שביעית:
$f(4)=f(3)=1, f(7)=8$
פונקציה שמינית:
$f(4)=f(3)=8, f(7)=1$

2. חשבו את ההרכבה של הפונקציות הבאות:
א. $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, $g(x)=\cos(x)$. חשבו את $f\circ g$ ואת $g\circ f$.
ב. $A=\{1,2,3,4,5\}, B=\mathbb{N}, C=\mathbb{Z}$, כאשר $\mathbb{N}$ מסמן את המספרים השלמים החיוביים, ו$\mathbb{Z}$ מסמן את המספרים השלמים.
$f:A\to B$ מוגדרת כך: $f(1)=2, f(2)=4, f(3)=10, f(4)=7, f(5)=1$.
$g:B\to C$ מוגדרת כך: $g(x)=x-5$.
פתרון:
א. $f\circ g(x)=f(g(x))=f(\cos(x))=\dfrac{1}{(\cos x)^2+1}$.
$g\circ f(x)=g(f(x))=g(\dfrac{1}{x^2+1})=\cos(\dfrac{1}{x^2+1})$
ב. $g\circ f(1)=g(f(1))=g(2)=-3$
$g\circ f(2)=g(f(2))=g(4)=-1$
$g\circ f(3)=g(f(3))=g(10)=5$
$g\circ f(4)=g(f(4))=g(7)=2$
$g\circ f(5)=g(f(5))=g(1)=-4$

3. נתונה $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת: $h(x)=|2^{3x}|$. מצאו פונקציות $f,g,k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש $h=f\circ g\circ k$.

פתרון:

נקח $k(x)=3x$, $g(x)=2^x$, $f(x)=|x|$.

4. קבעו האם הפונקיות הבאות חח"ע? על?

א. $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(x)=x+3$.

ב. $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}\cup\{0\}$, $f(x)=|x|$.

ג. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ $f(x)=[x]$, כאשר $[x]$ מסמן את המס' השלם שהכי קרוב לx מלמטה.

פתרון:

א. הפונקציה חח"ע. הוכחה:

יהיו $x_1,x_2\in\mathbb{N}$ כך ש $f(x_1)=f(x_2)$. כלומר, $x_1+3=x_2+3 \Longrightarrow x_1=x_2$.

הפונקציה לא על. הוכחה: ל1 אין מקור.

ב. הפונקציה לא חח"ע. למשל, $f(-1)=f(1)$.

הפונקציה כן על. לכל $x\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, x הוא מקור של עצמו. כלומר, $f(x)=|x|=x$.

ג. הפונקציה לא חח"ע. למשל, $f(1)=f(1.4)=1$.

הפונקציה כן על. הוכחה: לכל $x\in\mathbb{Z}$, x הוא מקור של עצמו. כלומר, $f(x)=[x]=x$.

5. א. מצאו פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שהיא על ולא חח"ע.

ב. מצאו פונקציה $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}\cup\{0\}$ שהיא חח"ע ועל.

פתרון:

א. נגדיר $f(1)=1$, ולכל $x>1$ ב$\mathbb{N}$, $f(x)=x-1$.

הפונקציה לא חח"ע, כי $f(1)=f(2)=1$.

הפונקציה על, כי לכל $x\in\mathbb{N}$ יש מקור: למשל $x+1$. הסבר: $f(x+1)=(x+1)-1=x$.
(למשל, המקור של 3 הוא 4).

ב. נגדיר: $f(0)=0$.

לכל $x\in\mathbb{Z}$ כך ש $x<0$, $f(x)=2(-x)+1$.

לכל $x\in\mathbb{Z}$ כך ש $x>0$, $f(x)=2x$.

הפונקציה חח"ע: יהיו $x_1\neq x_2\in\mathbb{Z}$. אם אחד מהם 0 והשני לא אז $f(0)=0$, והתונה של השני שונה מ0.

אם אחד מהם שלילי והשני חיובי, אז התמונה של השלילי היא מס' אי זוגי והתמונה של החיובי היא מס' זוגי ולכן הם בהכרח שונים.

אם שנים חיוביים: $f(x_1)=2x_1$ ו $f(x_2)=2x_2$. $x_1\neq x_2 \Longrightarrow 2x_1\neq 2x_2$.

אם שניהם שליליים: $f(x_1)=2(-x_1)+1$ ו $f(x_2)=2(-x_2)+1$. $x_1\neq x_2 \Longrightarrow 2(-x_1)+1\neq 2(-x_2)+1$.

הפונקציה על: יהי $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. אם $n=0$ המקור שלו 0. עבור $n\neq 0$:

אם n זוגי, אז $n=2m$ עבוא איזשהו $m\in\mathbb{N}$, המקור שלו הוא m.

אם n אי זוגי אז $n=2m+1$ עבור איזשהו $m\in\mathbb{N}$, המקור שלו הוא $(-m)$.