תרגיל 2 - בורל קנטלי והתכנסויות של משתנים מקריים - תשע"ט

17 במרץ 2019

1. סיזיפוזה התרנגולת מטילה כל בוקר 3 ביצים. בלילה היא דוגרת על ביצה שלמה מקרית (הנבחרת באופן אחיד), וזו בוקעת עד הבוקר. מה הסיכוי שתוטל ביצה אשר תשאר שלמה עד סוף הימים?

2. **הוכח: את הגרסה הבאה של בורל קנטלי למאורעות מוכלים.
אם מתקיים $\forall_k A_k \subseteq A_{k+1}$ אז $\mathbb{P}(A_n\, i.o) = 1$ אם ורק אם קיימת סדרת אינדקסים מונוטונית עולה $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ כך ש־ $\sum\limits_k \mathbb{P}(A_{t_{k+1}} | A_{t_k}^c) = \infty$

3. יהיו $X_1, X_2, ...$ משתנים מקריים בלתי תלויים המתפלגים נורמלית $N(0,1)$ כל אחד.
(הערה: $\forall_{X>0}: \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\frac{1}{X} - \frac{1}{X^3}) \cdot e^{-X^2/2} \le \mathbb{P}(N(0,1) \ge X) \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{X} \cdot e^{-X^2/2}$
חשבו:
   (א) $\mathbb{P}(\exists_N \forall_{n>N}\, max\{X_{n^2+1}, ..., X_{n^2+2n}\} > 5)$
   (ב) $\mathbb{P}(\exists_N \forall_{n>N}\, max\{X_{n^2+1}, ..., X_{n^2+30}\} > 5)$
   (ג) $\mathbb{P}(|X_n| > \sqrt{2\ln(n)}\, i.o)$
   (ד) $\mathbb{P}(|X_n| > \sqrt{3\ln(n)}\, i.o)$

4. יהי U מספר המתפלג $U \sim unif([0,1])$ כך ש־ $U = 0.X_1X_2...$ הייצוג העשרוני של U. הוכיחו כי בהסתברות 1, כל רצף סופי של ספרות מופיע בייצוג של U אינסוף פעמים. (עיינו בערך "מספר נורמלי").

5. $\{A_n\}$, סדרת מאורעות, תקרא תלויה־סופית אם לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת קבוצה סופית $I_n \subseteq \mathbb{N}$ כך ש־ A_n בלתי תלויים ב־ $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}\setminus I_n}$. הוכיחו כי אם $\{A_n\}$ תלויה סופית אזי $\mathbb{P}(A_n\, i.o) \in \{0,1\}$.

6. יהיו $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 2 סדרות של משתנים מקריים המוגדרים על מרחב מדגם Ω.
הוכח: אם $X_n \xrightarrow{p} X$, $Y_n \xrightarrow{p} Y$ אז $X_n + Y_n \xrightarrow{p} X + Y$ (הוחיכו ישירות).

7. יהיו $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת משתנים מקריים כך ש־ $X_n \sim Geometric(\frac{\lambda}{n})$ כאשר $\lambda > 0$ קבוע כלשהו. נגדיר את סדרת המשתנים המקריים $Y_n = \frac{1}{n}X_n$. הוכח: $Y_n \xrightarrow{d} Exponential(\lambda)$.

8. יהיו $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת משתנים מקריים כך ש־ $X_n \sim Binomial(n, \frac{\lambda}{n})$ כאשר $\lambda < n \in \mathbb{N}$ קבוע כלשהו. הוכח: $X_n \xrightarrow{d} Poisson(\lambda)$.

9. יהי $1 \le r \le s$. הוכח: אם $X_n \xrightarrow{L^s} X$ אזי $X_n \xrightarrow{L^r} X$. (רמז: כדאי להיעזר באי שיוויון $Holder$ המוכר מהקורס באנליזה מודרנית המקיים $\mathbb{E}[XY] \le (\mathbb{E}[|X|^P])^{1/p}(\mathbb{E}[|X|^q])^{1/q}$)

10. יהי X משתנה מקרי כלשהו. נגדיר $X_n = X + Y_n$. כאשר $\mathbb{E}[Y_n] = \frac{1}{n}$, $Var(Y_n) = \frac{\sigma^2}{n}$ ($\sigma > 0$ קבוע) הוכח כי $X_n \xrightarrow{p} X$.