תרגול 7

משפט גרין

משפט: (גרין) יהי R תחום פשוט קשר במישור, ותהי השפה של R עקומה פשוטה סגורה וחלקה למקוטעין C, שמגמתה הפוכה לכיוון השכון, אם יש ל $f(x,y)$ ול $g(x,y)$ נגזרות חלקיות רציפות מסדר ראשון בקבוצה פתוחה כלשהי המכילה את R אז

$$\int_C f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dA.$$

דוגמא : באמצעות משפט גרין, חשב את האינטגרל $\int_C x^2 y\,dx + x\,dy$ לאורך המסלול שצורתו כמשולש $(0,0)\to(1,0)\to(1,2)\to(0,0)$.

פתרון: לפי התון $f(x,y)=x^2y$ ו $g(x,y)=x$. ממשפט גרין נובע כי

$$\int_C x^2 y\,dx + x\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 y)\right) dA = \int_0^1 \int_0^{2x} \left(1-x^2\right) dy\,dx$$
$$= \int_0^1 \left(2x - 2x^3\right) dx = \left[x^2 - \frac{x^4}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

דוגמא : חשב את העבודה שמבצע שדה הכוח $\mathbf{F}(x,y) = \left(e^x - y^3\right)\mathbf{i} + \left(\cos y + x^3\right)\mathbf{j}$ על חלקיק, הנע על מעגל היחידה $x^2+y^2=1$, בכיוון הפוך לכיוון השעון, ומשלים הקפה אחת.

פתרון: העבודה שמבצע השדה הינה

$$W = \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C \left(e^x - y^3\right) dx + \left(\cos y + x^3\right) dy$$

קל לבדוק ולראות כי השדה $\mathbf{F}$ איננו משמר, לפיכך אין לצפות כי העבודה תהיה 0. במקום לחשב את העבודה ישירות עפ"י הגדרה נשתמש במשפט גרין.

$$W = \oint_C \left(e^x - y^3\right) dx + \left(\cos y + x^3\right) dy$$
$$= \iint_R \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\cos y + x^3\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(e^x - y^3\right)\right) dA$$
$$= 3\iint_R \left(x^2+y^2\right) dA = 3\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(r^2\right) r\,dA = \frac{3\pi}{2}$$

חישוב שטח באמצעות משפט גרין

אם נציב $f\left(x,y\right)=0$ ו $g\left(x,y\right)=x$, נוכל באמצעות משפט גרין לחשב את השטח של תחום פשוט קשר באמצעות הנוסחאות הבאות:

$$A=\oint_C xdy=-\oint_C ydx=\frac{1}{2}\oint_C -ydx+xdy\ .$$

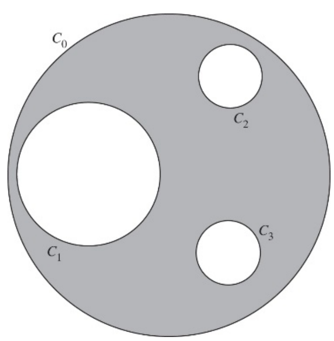
דוגמא: חשב את השטח הכלוא בתוך האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

פתרון: אם לאליפסה מגמה הפוכה לכיוון השכון, ניתן לייצגה על ידי $x=a\cos t$ ו $y=b\sin t$ $\left(0\le t\le 2\pi\right)$. נסמן עקומה זו ב C . השטח A הכלוא באליפסה הוא אפוא –

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{2}\oint_C -ydx+xdy\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\left(-b\sin t\right)\left(-a\sin t\right)+\left(a\cos t\right)\left(b\cos t\right)\right]dt\\&=\frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}1dt=\pi ab\end{aligned}$$

משפט גרין בתחום רב-קשר

תחום רב קשר, בניגוד לתחום פשוט קשר הינו תחום שיש בו "חורים". ניקח למשל תחום ובו חור אחד. נניח כי הפונקציות $f\left(x,y\right)$ ו $g\left(x,y\right)$ מקיימות את תנאי משפט גרין בתחום זה. נסמן ב C_1 את השפה החיצונית של התחום עם מגמה בכיוון השעון וב C_2 את השפה הפנימית עם מגמה נגד כיוון השעון.



כעת משפט גרין מקבל את הצורה,

$$\iint_R\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)dA=\oint_{C_1} f(x,y)\,dx+g(x,y)\,dy+\oint_{C_2} f(x,y)\,dx+g(x,y)\,dy\,.$$

באופן כללי יותר, כאשר יש n חורים, נקבל באגף ימין של המשוואה n אינטגרלים על השפה של כל חור כאשר המגמה היא עם כיוון השעון ואינטגרל אחד על השפה החיצונית של התחום נגד כיוון השעון.