הרצאה XVIII- אינפי 1

נוכיח את כלל השרשרת.

משפט: $f\big(g(x)\big)$, f ו g דיפרנציאביליות בx_0, וg בנקודה $f(x_0)$. אזי $h = g\circ f$ דיפרנציאבילית בx_0. ומתקיים כי הנגזרת נתונה ע"י $h'(x_0) = f'(x_0)g'\big(f(x_0)\big)$.

הוכחה: f דיפרנציאבילית בx_0, וגם $f(x_0+t) = f(x_0) + At + o(t), t \to 0$, g דיפרנציאבילית ב$y_0 = f(x_0)$. וגם כן מתקיים, בדומה לf, ש$g(y_0+s) = g(y_0) + Bs + o(s), s \to 0$. ומתקיים $B = g'(y_0)$.

גם כן מתקיים $h(x_0+t) = g\big(f(x_0+t)\big) = g\big(f(x_0) + At + o(t)\big)$, ונגדיר $\varepsilon(t) = \frac{o(t)}{t} \to_{\to 0} 0$ ולכן $\varepsilon(t)\, t = o(t)$, ובאופן דומה $o(s) = \mu(s)s\ , \mu(s) \to_{s\to 0} 0$. אפשר להציב כדי לקבל $h(x_0+t) = g\left(f(x_0) + \underbrace{At + \varepsilon(t)t}_{s}\right)$,ואם נבודד נקבל שמתקיים $h(x_0+t) = g(y_0+s)$.מתקיים $h(x_0+t) = g(y_0) + Bs + \mu(s)s = g\big(f(x_0)\big) + B(At+\varepsilon(t)t) + \mu(At+\varepsilon(t)t)(At+\varepsilon(t)t)$. ולכן $g\big(f(x_0)\big) + BAt + \underbrace{B\varepsilon(t)t + \mu(At+\varepsilon(t)t)\big(A+\varepsilon(t)\big)t}_{o(\varepsilon),\varepsilon\to 0}$. ומכאן $h(x_0+t) = g\big(f(x_0)\big) + BAt + o(t), t \to 0$ ומכאן שh דיפרנציאבילית בנקודה x_0 ומתקיים $BA = h'(x_0)$ וגם $h'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$.

תרגילים:

1. נניח $f(x) = e^{sinx}$. אז לפי כלל השרשרת $f'(x) = e^{sinx}\cos x$.
2. $\left(e^{\sin\ln x}\right)' = \frac{e^{sinlnx}\cos\ln x}{x}$.
3. $\left(e^{e^{e^x}}\right)' = e^{e^{e^x}}e^{e^x}e^x$.
4. $(x^x)' = \left(e^{xlnx}\right)' = e^{xlnx}\left(\ln x + x\frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1)$.
5. $(\sin x^2)' = \cos x^2\, 2x$.

משפטים יסודיים של חשבון דיפרנציאלי:

קיצון מקומיים:

הגדרה: $A \subset R$, $f: A \to R$, $x_0 \in A$. x_0 תקרא קיצון מקומי- מקסימום מקומי- אם קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in A \cap U_\delta(x_0)$ מתקיים $f(x) \le f(x_0)$. x_0 תקרא מינימום מקומי אם קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in A \cap U_\delta(x_0)$ מתקיים $f(x) \ge f(x_0)$. כל נקודת מינימום או מקסימום מקומי היא נקודת קיצון מקומית.

הגדרה: x_0 נקודת מקסימום ממש (חזק) מקומי אם $\exists\delta > 0 : \forall x \in A \cap U_\delta(x_0), x \ne x_0, f(x) < f(x_0)$ ובהתאם, תקרא מינימום ממש (חזק) אם מתקיים $\exists\delta > 0 : \forall x \in A \cap U_\delta(x_0), x \ne x_0, f(x) > f(x_0)$.

דוגמא: $f(x) = \begin{cases} x^2, |x| \le 1 \\ 1\ , |x| > 1 \end{cases}$, $x_0 = 0$ נקודת מימום ממש, $x_0 = 1$ נקודת מקסימום, $x_0 = 2$ נקודת מקסימום ומינימום.

למה של פרמה (Fermat)

כל פונקציות דיפירנציאבילית על $D(a,b) = \{(a,b)\}$ וגם כן מתקיים $D(a,b) \subset C(a,b)$. מה הלמה בעצם אומרת?

הלמה : תהי פונקציה $f: (a,b) \to R$, ו $x_0 \in (a,b)$ נקודת קיצון מקומי, וf דיפרנציאבילית בנקודה x_0, אזי $f'(x_0) = 0$.

הוכחה : מתקיים $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x<x_0}} = f'(x_0-0)$ וידוע שמתקיים $f(x)-f(x_0) \le 0$ וגם $x < x_0$ לכן $x-x_0 < 0$, ולכן $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0$.ז״א $f'(x_0-0) \ge 0$. במקרה שלנו $f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x>x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ לכן $x-x_0 > 0$ לכן $f'(x_0+0) \le 0$. ע״פ משפט שהוכחנו מתקיים $f'(x_0-0) = f'(x_0) = f'(x_0+0)$ ולכן $f'(x_0) = 0$. מ.ש.ל.

גם כן מתקיים : $f: [a,b] \to R$ אם a נקודת מקסימום מקומי וקיימת $f'(a+0)$ אזי $f'(a+0) \le 0$.

<u>תנאי הכרחי לנקודת קיצון</u> : אם x_0 נקודת קיצון, מתקיים $f'(x_0) = 0$. הכיוון השני לא בהכרח נכון, לדוגמא $f(x) = x^3, x_0 = 0$.

<u>למה של רולה *(Rolle)*</u>

<u>משפט</u> : $f \in D(a,b) \cap C[a,b]$. אם $f(a) = f(b)$ אז קיימת $c \in (a,b)$, כך ש$f'(c) = 0$.

הוכחה : אם $f = constant, f(x) = \alpha \; ; \forall x \in (a,b) \; : f'(x) = 0$. נניח שf לא קבוע.

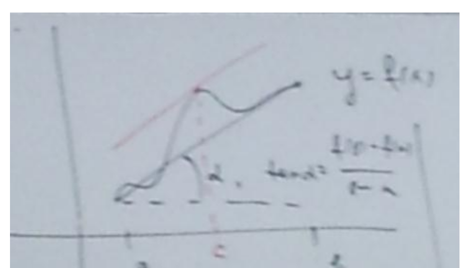
לפי המשפט של ווירשטראס, f מקבלת ב*[a,b]* מקסימום ומינימום. $\exists x_{max} \in (a,b) : f(x_{max}) = \max f(x)$ כמו כן, בצורה דומה מאוד $\exists x_{min} \in (a,b) : f(x_{min}) = \min f(x)$. אם $x_{min}, x_{max} \in [a,b]$ אזי $f(x_{min}) = f(x_{max}) = f(a) = f(b)$. אם כך מתקיים $\min f(x) = \max f(x)$, ולכן *f=const* אזי x_{max} או x_{min} נקודה פנימית, נניח $c = x_{max} \in (a,b)$ ולכן $f'(x) = 0$.

<u>משפט של לגרנג׳ *(Lagrange)* על נקודה בינונית</u>

<u>משפט</u>:תהי $f \in D(a,b) \cap C[a,b]$ אזי קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש$f'(b) - f'(a) = f'(c)(b-a)$, ז״א $f'(c) = \frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}$.

הוכחה : נגדיר $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. מתקיים $F(a) = f(a)$, $F(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(a)$. לכן לפי הלמה של רול קיימת $c \in (a,b)$ כך ש$F'(c) = 0$, ז״א $F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ ולכן $f'(c) = \frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}$. מ.ש.ל.

<u>משמעות גיאומטרית</u> :



מצטער על האיכות המדהימה. אם למישו יש תחליף אשמח לקבל אותו במייל (:

מסקנה: נניח $f\in D(a,b)$, אם $\forall x:\ f'(x)=0$ אזי f=const.

הוכחה: $x_1,x_2\in(a,b)$, ומכאן ש$\exists \mathrm{c}: \mathrm{x}_1<c<x_2; f(x_1)-f(x_2)=f'(c)(x_1-x_2)=0$ ולכן $f(x_1)=f(x_2)$ ולכן היא קבועה. מ.ש.ל.

תרגילים:

1. $f\in D(a,b), \forall \mathrm{x}\in(\mathrm{a},\mathrm{b}): f'(x)=A$, נחפש את הפונקציה המקורית שמקיימת זאת:
   נרשום $(f(x)-Ax)'=f'(x)-A=0$ ולכן $f(x)=Ax+B$. בעצם פתרנו משוואה דיפרנציאלית פשוטה מאוד.
2. $f\in D(a,b), f'(x)=\alpha f(x)$. נתחיל מהסוף ע"י הנחה ש$f(x)=ce^{\alpha x}$ וניתן לראות שהתנאי מתקיים.

מסקנה: אומדן של שינוי פונקציה:

משפט: תהי $f\in D(a,b)\cap C[a,b]$, ונניח כי $|f'(x)|\le M$, לכל x בתחום הגדרה. אזי $|f(b)-f(a)|\le M(b-a)$.

הוכחה: ע"פ משפט לגרנג' $\exists \mathrm{c}\in(\mathrm{a},\mathrm{b}): f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ ולכן $|f(b)-f(a)|=|f'(c)|(b-a)\le M(b-a)$. מ.ש.ל.

תרגיל: (לשימוש במשפט) נמצא אומדן לביטוי הבא $\sqrt{4+\delta}-\sqrt{4}$. נסמן $f(x)=\sqrt{4+x}$. מתקיים על פי המשפט שהוכחנו לפי שתי שורות $f(\delta)-f(0)\le \max\limits_{x\in(a,b)}|f'(x)|$ ומתקיים $|f'(x)|=\left|\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{4+x}}\right|\le\frac{1}{4}$ לכן $|f(\delta)-f(0)|\le\frac{1}{4}\delta$. ולכן $\left|\sqrt{4.1}-2\right|\le\frac{1}{4}0.1$, ומכאן $\sqrt{4.1}\approx 2.025$.

משפט: (קושי) $f,g\in D(a,b)\cap C[a,b]$ אזי קיימת נקודה $c\in(a,b)$, כך ש$\big(f(b)-f(a)\big)g'(c)=\big(g(b)-g(a)\big)f'(c)$. ז"א בעצם שמתקיים $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{(f(b)-f(a))}{g(b)-g(a)}$ כמובן בהנחה ש$g(b)-g(a)\ne0$ וגם $g'(c)\ne0$.

הוכחה: נגדיר $F(x):=\big(f(b)-f(a)\big)g(x)-f(x)\big(g(b)-g(a)\big)$.

נציב a ונקבל $F(a)=\big(f(b)-f(a)\big)g(a)-f(a)\big(g(b)-g(a)\big)=f(b)g(a)-f(a)g(a)-f(a)g(b)+f(a)g(a)$ ונשאר לנו $F(a)=f(b)g(a)-g(b)f(a)$.

הפעם נציב b כדי לקבל $F(b)=\big(f(b)-f(a)\big)g(b)-f(b)\big(g(b)-g(a)\big)=f(b)g(b)-f(a)g(b)-f(b)g(b)+f(b)g(a)$, ניתן לראות שמתקיים גם כן $F(b)=f(b)g(a)-f(a)g(b)$ ולכן $F(a)=F(b)$. ומכאן לפי הלמה של רול, קיים $c\in(a,b)$ כך ש$F'(c)=0=\big(f(b)-f(a)\big)g'(c)-f'(c)\big(g(b)-g(a)\big)$