אבנר סופר

אוניברסיטת תל אביב

מבוא לפיזיקה מודרנית

תורת היחסות הפרטית

טרנספורמצית לורנץ

ראינו שטרנספורמצית גליליי המוכרת בעייתית, כי אינה מסכימה עם עקרון היחסות של איינשטיין, כלומר אינה מסכימה עם תוצאות ניסוי מייקלסון מורלי. כעת נחפש טרנספורמציה חדשה בין מערכות אינרציאליות שכן מכבדת את עקרון היחסות של איינשטיין.

האינטרוול (המרווח) האינוריאנטי

ראינו שבתורת היחסות, אורכו של גוף ומרווחי זמן בין שני ארועים אינם גדלים אינוריאנטים תחת המעבר בין מערכות אינרציאליות, וזאת להבדיל מהמקרה הניוטוני.

עם זאת, **גדלים אינוריאנטים** תחת פעולות שונות הם מפתח חשוב להבנה של המערכת הפיזיקלית.

לדוגמה: אנרגיה, תנע, ותנע זויתי (סביב נקודה מסוימת) הם גדלים אינוריאנטים תחת הזזת הזמן, תחת טרנסלציות (קבועות בזמן), ותחת סיבובים (קבועים בזמן), וידיעה זו שימושית ביותר בהבנת חוקי הפיזיקה.

לכן, חשוב לראות אם כן ישנם גדלים אינוריאנטים תחת מעבר בין מערכות אינרציאליות בתורת היחסות.

אם נוכל למצוא גודל כזה, הוא יהיה שימושי מאוד במציאת הטרנספורמציה הנכונה בין מערכות אינרציאליות.

נתבונן בשני אירועים, המתרחשים באותו מקום במערכת O ובהפרש זמן עצמי $\Delta\tau$.

הפרש הזמן במערכת 'O, שנעה לעומת O במהירות βc, הוא $\Delta t'=\dfrac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

נכפול במהירות האור ובמכנה ונעלה בריבוע:

$$c^2\Delta t'^2 - v^2\Delta t'^2 = c^2\Delta\tau^2 \quad (1)$$

מאחר ששתי המערכות נעות זו ביחס לזו במהירות v, הגודל $v\Delta t'$ שווה למרחק $\Delta x'$ בין שני המאורעות כפי שהוא נמדד במערכת 'O:

$$x'^2 = v^2\Delta t'^2 .$$

נציב זאת במשוואה (1), ונמצא:

$$c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 = c^2\Delta\tau^2 \quad (2) .$$

כעת נתבונן במערכת נוספת, "O, שנעה במהירות $\beta''c$ ביחס ל-O.

ברור שאם נחזור על החישוב שערכנו הרגע, נמצא במערכת זו

$$c^2\Delta t''^2 - \Delta x''^2 = c^2\Delta\tau^2 \quad (3) .$$

שימו לב: צד שמאל של משוואות (2) ו-(3) מתייחס לגדלים במערכות שונות: 'O ו-"O.

אך **בצד ימין מופיע אותו גודל**, $c^2\Delta\tau^2$, מהירות האור כפול הפרש הזמן במערכת העצמית של המאורעות, כלומר,

$$c^2\Delta t''^2 - \Delta x''^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 .$$

אז רואים שלגודל $c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$ יש אותו ערך בכל המערכות.

בשל חשיבותם של גדלים אינוריאנטים, נציין במפורש את הכלל:

לגודל $c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$ יש אותו ערך בכל המערכות האינרציאליות, כאשר Δt ו- Δx הם הפרשי הזמן והמרחק הנמדדים באותה מערכת אינרציאלית. גודל זה נקרא **האינטרוול האינווריאנטי** (או ריבוע האינטרוול האינוריאנטי – בד"כ לא נקפיד בענין)

האינוריאנטיות של האינטרוול תהיה חשובה בגזירת טרנספורמצית הקואורדינטות בין מערכות אינרציאליות.

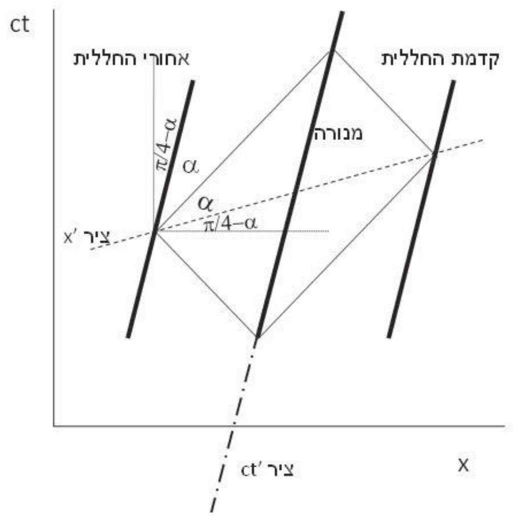
טרנספורמצית לורנץ

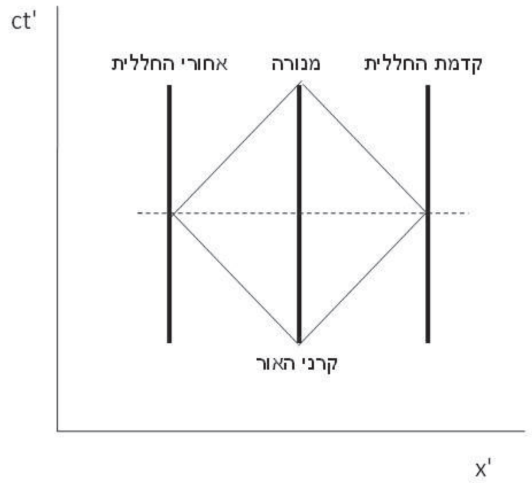
אנו מוכנים לגזור את כלל הטרנספורמציה בין מערכות אינרציאליות – הטרנספורמציה שתחליף את טרנספורמצית גליליי ותהיה קונסיסטנטית עם העקרונות של איינשטיין.

ניקח את הקואורדינטות להיות x ו-ct במערכת כדוה"א, וכן 'x ו-'ct במערכת החללית, כך שקו העולם של אור הוא ב-45 מעלות.

כמו כן, כדי להמנע מהזזות קבועות ולא מענינות, אנו מעונינים רק במקרה שזמני שתי המערכות מתלכדים ל-0 כאשר שראשיות הצירים המרחביות מתלכדות, כלומר, ct'=ct=0 כאשר x'=x=0.

קודם כל, נתבונן בניסוי סינכרון השעונים בחללית, הפעם כאשר ניתן לקרני האור לחזור מקצות החללית אל המנורה:





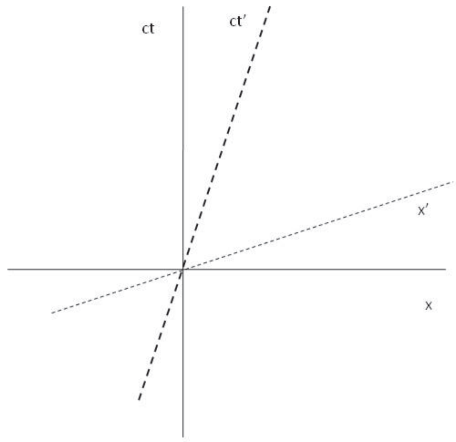
משמאל: במערכת כדוה"א. מימין: במערכת החללית.

בציור משמאל, כל אחד מהקוים המודגשים מקביל לציר ה-'ct, כי הוא קו העולם של עצם נייח בחללית.

כמו כן, הקו השבור מציין אירועים סימולטניים במערכת החללית.

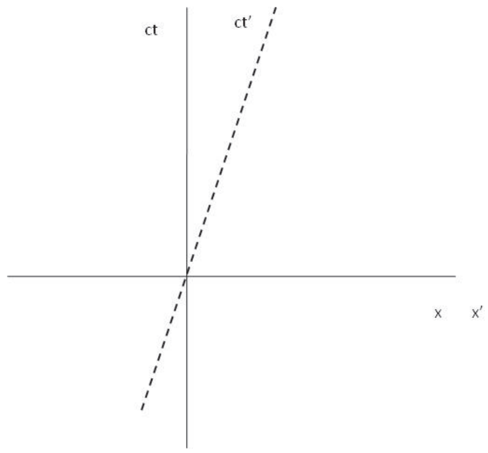
לכן קו כזה מקביל לציר ה-'x, כפי שקוי העולם של חלקי החללית מקבילים לציר ה-'ct.

כלומר, במערכת כדוה"א, צירי החללית נראים כך:



דיאגרמה שמראה את שתי מערכות הקואורדינטות היחסותיות בצורה זו נקראת **דיאגרמת מינקובסקי**.

השווה את דיאגרמת מינקובסקי היחסותית לזו של טרנספורמצית גליליי:



גם בטרנספורמצית גליליי, קו העולם של נקודה בחללית מקביל לציר ה-t', אבל ציר ה-x' היה זהה לציר ה-x, משום שזמן היה אינוריאנטי וסימולטניות נשמרה.

1. בשתי הדיאגרמות, השיפוע β של ציר ct' ביחס לציר ct משקף את זה שהמהירות היחסים בין המערכות היא β.

   בטרנספורמציית גליליי זה בא לידי ביטוי במשוואה $x' = x - \beta ct$.

מכאן נסיק שגם בטרנספורמצייה היחסותית נקבל יחס דומה, בו ההטייה של ציר ct' ביחס לציר ct היא β. יחס כזה ניתן ע"י הביטוי הכללי $x' \propto x - \beta ct$.

דרך אחרת לראות זאת:

צופה בכדוה"א רואה את החללית נעה במהירות βc.

לכן הוא רואה את קו העולם של נקודה בחללית מוטה ביחס לציר ct עם שיפוע β.

כלומר, זהו קו שמשואתו $x = \beta ct + \text{constant}$.

שימו לב: קו עולם זה מקביל לציר ct' של מע' החללית, כך שכולו באותו ערך של x'.

לכן **הקבוע מימין פרופורציוני ל-x'**. כלומר, מצאנו את הקשר.

$$x' \propto x - \beta ct\ .$$

קו כזה שומר על השיפוע הרצוי בין x ו- ct,

וגם מתקיים התנאי ש- ct'=ct=0 כאשר x' = x = 0.

2. הקוים המקבילים לציר x' ולציר ct' הם האלכסונים במלבן שנוצר ע"י קרני האור.

לכן **לשני הצירים אותה זוית ביחס לקוי העולם של קרני האור**, שבזוית 45° לצירים.

אז גם ציר ה-x' מוטה ביחס לציר x בשיפוע β, כלומר, משוואת קו זה היא

$ct = \beta x + \text{constant}$, כאשר הקבוע פרופורציוני ל-ct', משום שקו זה מקביל לציר ה-x' ולכן כולו בערך יחיד של ct'. לכן מצאנו את הקשר

$$ct' \propto ct - \beta x\ .$$

3. אז מתנאים 1 ו-2, הטרנספורמציה שאנו מחפשים היא מהצורה

$$x' = \gamma(x - \beta ct)$$
$$ct' = \delta(ct - \beta x)$$

כאשר קבועי הפרופורציה γ ו- δ אינם תלויים בקואורדינטות.

הגודל היחיד שקבועי הפרופורציה יכולים להיות תלויים בהם הוא המהירות β (אין גדלים אחרים בבעיה).

קבועי הפרופורציה אינם 1, בשל התארכות הזמן והתקצרות האורך.

4. נתבונן במקרה המיוחד של קו העולם של הבזק אור בכדוה"א:

x = ct. נציב זאת בטרנספורמציה ונקבל:

$$x' = \gamma(ct - \beta ct)$$
$$ct' = \delta(ct - \beta ct)$$

לפי עקרון קביעות מהירות האור, חייב להתקיים x' = ct',

וזה מתקיים רק אם $\delta = \gamma$.

5. ידוע שהטרנספורמציה צריכה לשמר את גודל האינטרול האינוריאנטי. אז נכתוב אותו במערכת החללית, ביחס לראשית (t=0, x=0):

$$
\begin{aligned}
(ct')^2 - x'^2 &= [\gamma(ct-\beta x)]^2 - [\gamma(x-\beta ct)]^2 \\
&= \gamma^2\left[(ct)^2 + (\beta x)^2 - 2\beta xct - x^2 - (\beta ct)^2 + 2\beta xct\right] \\
&= \gamma^2\left[(ct)^2 - x^2\right](1-\beta^2)
\end{aligned}
$$

אז מהדרישה שהאינטרוול זהה בשתי המערכות, מקבלים

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

אז הטרנספורמציה נתונה ע"י

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma(x-\beta ct) \\ ct' &= \gamma(ct-\beta x) \end{aligned}}$$

כאשר

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\beta = \frac{V}{c}$$

זוהי **טרנספורנצית לורנץ**.

הערות:

- טרנספורמצית לורנץ נוסחה ע"י מספר חוקרים בזמנים שונים:

  Voigt (1887) , Larmor (1900), Lorentz (1903).

אך הם ראו בה כלי מתימטי לטיפול במשוואות מקסוול, למשל, ולא הבינו את משמעותה העמוקה לגבי הגיאומטריה של המרחב-זמן, שהתגלתה ע"י איישנטיין (על כך בהמשך).

- משוואות מקסוול אינוריאנטיות תחת טרנספורמצית לורנץ (לא נלמד בקורס זה), כך שחוקי האלקטרומגנטיות אכן נכונים בכל מערכת אינרציאלית.
- שימו לב שאינוריאנטיות האינטרול התקבלה מתוך נוסחת התארכות הזמן.

לכן, ניתן להחליף את שלב 5 בהוכחה למעלה ע"י הדרישה שהפרש הזמן בין שני אירועים

שנמצאים באותו מקום במערכת כדוה"א יהיה גדול בפקטור $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ מהפרש הזמן בין אותם אירועים במערכת החללית.

- שימו לב שהטרנספורמציה לינארית.

אחרת, היא היתה נותנת תוצאות שונות באזורים שונים של המרחב והזמן ולכן היתה תלויה בקיומה של ראשית צירים מוחלטת.

למשל, אם ct' היה תלוי ב-x^2, מרווחי זמן היו תלויים ב- $x_1^2 - x_2^2$, וגודל זה משתנה תחת הזזת הראשית מ-0 ל-x_0.

זה שהטרנספורמציה לינארית תואם את **העקרון שאין ראשית צירים מועדפת**

- הטרנספורמציה ההפוכה מתקבלת ע"י היפוך כוון המהירות:

$$x = \gamma(x' + \beta ct')$$
$$ct = \gamma(ct' + \beta x')$$

(ראו שאלת בית בנושא היפוך הטרנספורמציה)

- נוח לתת שם קצר יותר לטרנספורנצית לורנץ, כשם שטרנספורנצית סיבוב נקראת פשוט "סיבוב".

השם הנהוג הוא **boost**, כלומר, דחיפה או האצה של הצופה למערכת ייחוס בעלת מהירות כלשהי ביחס למהירותו במערכת ה"תחילית".

הקירוב הניוטוני

נמצא קירוב לטרנספורמצית לורנץ עבור מהירויות נמוכות.

בקירוב זה נשמור רק איברים מסדר ראשון בגודל הקטן $\beta \ll 1$.

קודם כל, נראה מה קורה ל-γ:

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx \frac{1}{1-\frac{1}{2}\beta^2} \approx 1+\frac{1}{2}\beta^2$, ובקירוב שלנו מקבלים $\gamma \approx 1$.

אז טרנספורמצית לורנץ היא

$$x' \approx x - vt$$
$$ct' \approx ct - \beta x$$

הטרנספורמציה של x זהה לטרנספורמצית גלילי.

אך מה עם הטרנספורמציה של הזמן?

לכאורה, האיבר השני בשורה השנייה הוא מסדר ראשון ב-β, והוא אינו נראה כמו טרנספורמצית גליליי.

אבל שימו לב שהאיבר βx קטן משאר האיברים במשוואה $ct' \approx ct - \beta x$ לא רק משום ש-β<<1, אלא גם משום שבכל מצב של חיי יום-יום (v<<c) מתקיים גם x<<ct. לכן אי אפשר לקבוע את הסדר של β מצורה זו של המשוואה.

אז נהפוך אותה לצורה בה לכל האיברים גדלים דומים:

כאשר v << c, אז vt = O(x), כלומר, vt הוא מרחק מאותו סדר גודל של x (כי המרחק שעובר גוף בזמן מסוים שווה למהירותו כפול הזמן)

לכן נכפול את המשוואה ב-v/c ואז נוכל להשוות איברים מגדלים שווים (vt ו- x):

$$vt' \approx vt - \frac{v^2}{c^2}x \approx vt$$

כעת אפשר לראות שהמקדם של x הוא מסדר שני ב-β.

לכן מקבלים את טרנספורמצית גליליי כאשר שומרים רק איברים מסדר ראשון ב-β:

$$x' \approx x - vt$$

$$vt' \approx vt - \frac{v^2}{c^2}x \approx vt$$

הערה: זהו **רמז** שפיזיקה ניוטונית היא קירוב של פיזיקה יחסותית במקרה של מהירויות נמוכות. זו אינה **הוכחה** לכך, משום שפיזיקה ניוטונית היא יותר מאשר רק טרנספורמצית גליליי.

הערה: האם נכון לומר שטרנספורמצית גליליי איננה נכונה?

לא!

טרנספורמצית גליליי טובה מאוד עבור מהירויות קטנות בין מערכות ייחוס אינרציאליות, שזה רלוונטי עבור רוב המקרים בחיי היום-יום, אך היא הופכת לבלתי מדויקת במהירויות גבוהות.

זה כמו ש- F=mg הוא קירוב מצוין של $F = G\frac{M_{Earth}m}{r^2}$ עבור $r \sim R_{Earth}$.

טרנספורמצית לורנץ כללית יותר: היא מדויקת בכל המהירויות.

תורת היחסות מרחיבה את המכניקה הניוטונית למהירויות גבוהות.

אבל: כמו שטרנספורמצית גליליי התגלתה כבלתי כללית, גם תורת היחסות הפרטית אינה אלא קירוב של תורת היחסות הכללית, שגם היא עשויה להיות קירוב של מקרה כללי יותר.

למרות שאנו שואפים להבין את כל הפיזיקה בכל התנאים, ההתקדמות המדעית תלויה בידע קודם וביכולת לבצע ניסויים בתנאים חדשים.

לכן אנו מתקדמים כל פעם ככל יכלתנו.

גליליי וניוטון חוללו מהפכות למרות שתורותיהם התבררו אח"כ כבלתי-שלמות. אך יש להבדיל בין חוסר שלמות לחוסר נכונות.

<u>יחידות טבעיות</u>

כבר אמרנו שניתן להגדיר יחידת אורך באמצעות יחידת זמן ומהירות האור.

מאחר שמרחק וזמן מקושרים ע"י מהירות האור, שהיא קבוע של הטבע, הם למעשה בעלי אותם ממדים. אנו מודדים אותם ביחידות שונות מטעמים היסטורים בלבד.

שימו לב לדמיון בין היחס $c = 299{,}792{,}458$ m/s

לבין אגורה\שקל 100 = יחס המרה, או "רכב שצורך 0.1 ליטר דלק לקילומטר"

בכל המקרים יש שימוש ב"קבוע של הטבע", שמראה שאגורות ושקלים (או מטרים ושניות) מתארים בעצם את אותו דבר, עם יחס המרה קבוע וידוע.

לכן אפשר להפטר מאחת מהיחידות ולעבוד רק עם השניה.

למשל, נוח למדוד מרחקים לכוכבים באמצעות "שנות×אור" – המרחק שעובר אור בשנה אחת.

לנו יהיה נוח לעבוד עם יחידות בהן $c=1$ ולהפטר מהצורך לכתוב את c כל הזמן.

נבחר להמשיך למדוד מרחק במטרים, ולמדוד זמן ביחידות מטר\אור (מטרים חלקי מהירות האור).

מטר\אור אחד הוא הזמן שלוקח לאור לעבור מרחק של מטר אחד.

שנייה אחת שווה 3×10^8 מטר\אור, ואילו מטר\אור אחד הוא $1/(3\times10^8)$ שניות.

במקום "מטר\אור" נקרא ליחידה "מטר", כלומר, ניקח $c=1$.

ביחידות אלה טרנספורמצית לורנץ הופכת להיות סימטרית:

$$x' = \gamma(x - \beta t)$$
$$t' = \gamma(t - \beta x)$$

והאינטרוול האינוריאנטי הוא פשוט $\tau^2 = t^2 - x^2$.

פיזיקאים מעדיפים לעבוד עם הגדלים החשובים וביחידות המתאימות.
העובדה שאנו מודדים מרחק במטרים וזמן בשניות היא היסטורית לחלוטין, ולכן נתעלם ממנה.
כשעוסקים באור רואים שמרחק וזמן שקולים, ולכן עובדים ביחידות שמתארות זאת.

טרנספורמצית לורנץ בנוטצית מטריצה

פעמים רבות שימושי לכתוב את הטרנספורמציה בנוטציה של מטריצות:
למשל, טרנספורמצית גליליי (ראינו בתרגול):

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

טרנספורמצית לורנץ היא

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

בתרגול נראה כיצד נוטציה זו עוזרת בשילוב מספר טרנספורמציות בזו אחר זו.

מהי הטרנספורמציה עבור המימדים y, z (כאשר הבוסט הוא בכוון x)?
כבר טענו שאין שינוי אורך במימדים אלה. מכאן שהטרנספורמציה היא טריוויאלית:

$y' = y$

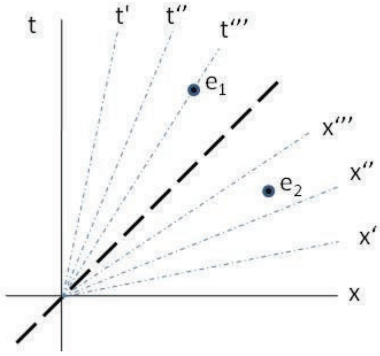
$z' = z$

לכן, טרנספורמצית לורנץ ב-4 ממדים היא

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

<u>סוגי אינטרוולים, קונוס האור, וסיבתיות (Causality)</u>

נתבונן בצירים של אוסף המערכות המתקבלות ע"י טרנספורמציות לורנץ שונות ממערכת O:



מאחר שציירנו את זה כך ש-$\beta<1$, צירי הזמן תמיד מעל לקו האור וצירי המרחב תמיד מתחתיו.

כעת נתבונן בארוע מסוים $e_1 = (t_1, x_1)$.

האינטרוול בין ארוע זה והראשית חיובי, משום ש- $t_1 > x_1$.

כמו כן, האינטרוול בין הראשית והארוע $e_2 = (t_2, x_2)$ הוא שלילי, משום ש- $t_2 < x_2$.

מאחר שהאינטרוול של e_1 חיובי, קיימת מערכת שעבורה הערך x של e_1 הוא 0.

זוהי מערכת O''' בציור, משום שרואים ש- e_1 נמצא על ציר t'''.

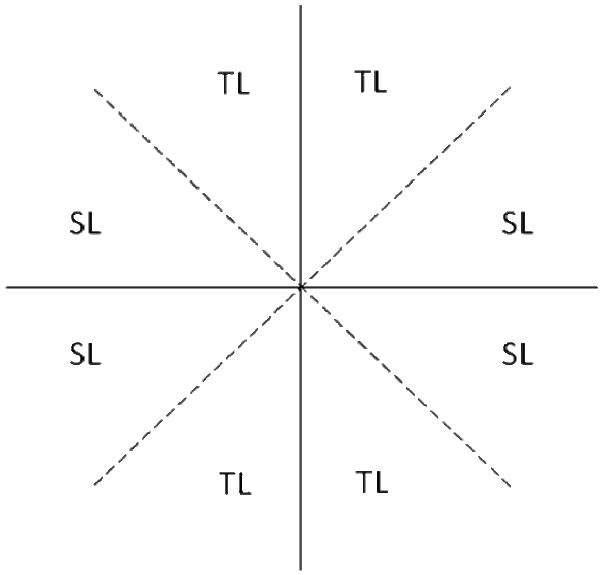
ניתן למצוא את הטרנספורמציה בין O ל-O'''. מאחר ש- e_1 נמצא על ציר t''', אז $x'''=0$:

$$x''' = \gamma(x_1 - \beta t_1) = 0$$

$$\beta = \frac{x_1}{t_1}$$

אינטרוול חיובי נקרא **Time-like**, משום שקיימת מערכת בה לשני קצות האינטרוול אותו x, כך שהאינטרוול מקביל לציר הזמן במערכת זו.
אינטרוול שלילי נקרא **Space-like**, משום שקיימת מערכת בה לשני קצות האינטרוול אותו t, כך שהאינטרוול מקביל לציר המרחק במערכת זו.
אינטרוול בעל גודל 0 נקרא **Light-like**, משום שהוא מקביל לקו העולם של קרן אור בכל מערכת.

הציור הבא מראה את האזורים השונים של מרחב מינקובסקי בהם האינטרוול ביחס לראשית הוא SL או TL (כרגיל, ציר הזמן הוא אנכי):



בציור זה, האזור שהוא TL נמצא במשולשים העליון והתחתון, שנוצרים ע"י קוי האור.
אם נוסיף לציור את כוון y, האזור שהוא TL יהיה נפח בצורת שני **חרוטים** שקודקודיהם נוגעים.
אם נוסיף את z, הנפח החרוטי הופך למשטח תלת ממדי הכולא בתוכו חרוט ארבעה-ממדי.

החרוט בו נמצאים כל האינטרוולים שהם TL ביחס לראשית נקרא חרוט האור (Light cone)

בין הראשית וארוע בתוך חרוט האור (האינטרוול שהוא TL) ניתן להעביר מידע באמצעות "שליח" פיזיקלי בעל מהירות מותרת, כלומר, $\beta<1$.

בין הראשית וארוע שמחוץ לחרוט האור אי אפשר להעביר מידע.

לכן, ארועים כאלה אינם יכולים להשפיע זה על זה.
אומרים שהם **מופרדים סיבתית (Causally separated)**.

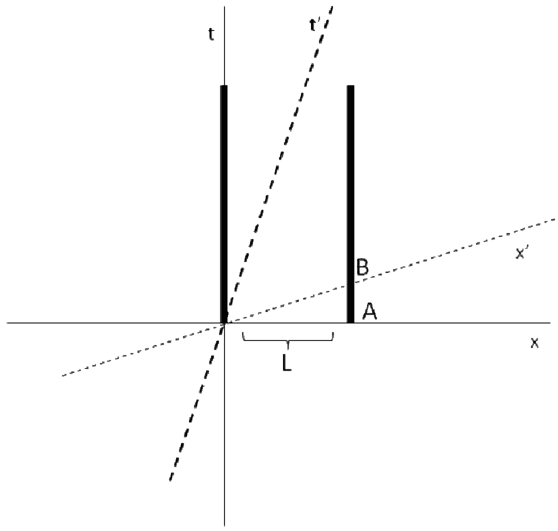
לסיבתיות (Causality) תפקיד חשוב בפיזיקה. למשל, בתורת השדות הקוונטית תלמדו על תכונות מרכזיות של חלקיקים (ספין וקשרי חילוף) שנובעים מקיום הסיבתיות.

<u>התארכות הזמן והתקצרות האורך</u>

הראינו שבעקבות עקרון קביעות האור מתקיימת התארכות זמן והתקצרות אורך בפקטור γ.
אבל טרנספורמציית לורנץ נראית סימטרית עבור ציר הזמן וציר המרחב.
אז איך זה שבמקרה אחד ישנה התקצרות ובשני התארכות?

הסיבה לכך היא שישנו הבדל בין מדידת אורך למדידת מרווח זמן:
מדידת אורך היא מדידת מיקומם של שני אירועים בו-זמנית במערכת המודד,
ומדידת זמן היא מדידת הפרש הזמן בין שני אירועים **שאינם בהכרח** באותו מקום במערכת המודד.

נתחיל עם הדגמת מדידת אורך:



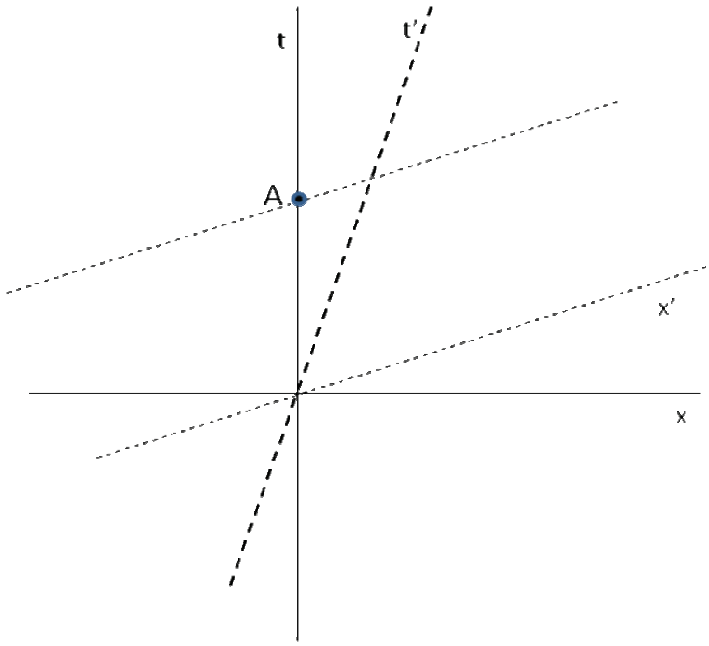
נתון מוט שב-O אורכו הוא L, כלומר L הוא המרחק מ-A לראשית (מדידה סימולטנית).
אבל ב-O', מדידה סימולטנית של מיקומי קצות המוט היא בין B לראשית.

הקואורדינטות של B הן $B: (t, x) = (\beta L, L)$

אז ב-'O, המיקום שלה הוא $x' = \gamma(x - \beta t) = \gamma(L - \beta^2 L) = L/\gamma$

כלומר, התקצרות.

כעת נתבונן במדידת הפרש זמן בין שני אירועים: הראשית וארוע A, שב-O קורים באותו מקום:



אנו רוצים לדעת את הזמן שימדוד צופה ב-'O עבור ארוע A.

כדי למצוא זמן זה גראפית, נעביר קו מקביל לציר x' ונראה איפה הוא פוגע בציר t'.

ה"פתרון" הגראפי אינו מספיק כדי למצוא את הקואורדינטות של A. נשתמש לכך בטרנספורמצית לורנץ:

הקואורדינטות של A ב-O הן $A: (t, x) = (T, 0)$.

נמצא את הזמן של A ב-'O: $t' = \gamma(t - \beta x) = \gamma T$,

כלומר, התארכות.

כלל חיבור מהירויות

הראינו שהעקרון השני של איינשטיין יוצר בעיה אם מהירותה של מערכת ייחוס שווה למהירות האור או גדולה ממנה – מרווחי זמן הופכים בלתי מוגדרים.

כלל חיבור המהירויות של גליליי מאפשר לעצם להגיע לכל מהירות שהיא, אבל כלל זה נגזר מטרנספורמצית גליליי, שנכונה רק עבור מהירויות נמוכות.

אז נמצא את כלל חדש לחיבור מהירויות על-פי טרנספורנצית לורנץ:

נתון חלקיק שנע במהירות $v_x = dx/dt$ ב-O. מהי מהירותו ב-'O?

קודם כל, נשים לב שהמשתנים x ו- t אינם תלויים זה בזה.

נכון שהיחס dx/dt הוא מהירות הגוף, אבל זו יכולה להיות בעלת כל ערך (שנמוך מ- c).

אנו קובעים את המהירות ממדידות בלתי תלויות של x ו- t, לא להיפך.

נמשיך. מתוך

$$x' = \gamma(x - \beta t)$$
$$t' = \gamma(t - \beta x)$$

נכתוב את הדיפרנציאלים של גדלים אלה ביחס למשתנים הבלתי תלויים x ו- t:

$$dx' = \frac{\partial x'}{\partial x}dx + \frac{\partial x'}{\partial t}dt = \gamma(dx - \beta dt)$$
$$dt' = \frac{\partial t'}{\partial x}dx + \frac{\partial t'}{\partial t}dt = \gamma(dt - \beta dx)$$

אז המהירות ב-'O היא היחס בין הדיפרנציאלים הללו:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - \beta dt)}{\gamma(dt - \beta dx)} = \frac{\frac{dx}{dt} - \beta}{1 - \beta\frac{dx}{dt}}$$
$$= \frac{v_x - \beta}{1 - \beta v_x}$$

המונה זהה לחיבור המהירויות של גליליי, אך כאן המכנה שונה מ-1.

שימו לב: אנו עובדים ביחידות הטבעיות, כלומר v_x היא מהירות החלקיק ביחס למהירות האור.

כדי לקבל את המהירות ביחידות "רגילות", נסמן $u_x \equiv cv_x$, ואז

$$u'_x = cv'_x = \frac{u_x - \beta c}{1 - \beta\frac{u_x}{c}}$$ (שימו לב לפשטות הביטוי ביחידות טבעיות ביחס לביטוי זה)

בטרנספורנצית גליליי, רכיבי המהירות הניצבים לבוסט אינם משתנים.

אבל במקרה היחסותי, נצפה שיהיה שינוי במהירות הניצבת, משום שמרווח הזמן משתנה.

נראה:

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - \beta dx)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma\left(1 - \beta\frac{dx}{dt}\right)}$$

$$= \frac{v_y}{\gamma(1 - \beta v_x)}$$

שימו לב שטרנספורמצית המהירות בכוון הניצב לבוסט תלויה במהירות בכוון המקביל אליו:

אז נסכם:

$$v'_x = \frac{v_x - \beta}{1 - \beta v_x}$$

$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - \beta v_x)}$$

$$v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1 - \beta v_x)}$$

שימו לב שביצענו כאן **חיסור של מהירויות** $v_x - \beta$, משום ש-v_x ו-β הן באותו כוון.

אפשר גם לקבל את כלל הטרנספורמציה עבור **חיבור מהירויות** ע"י היפוך הסימן של β-.

שאלת בית: כתבו את מטריצות הטרנספורמציה מ-O_0 ל-O_1 ומ-O_1 ל-O_2 , כאשר כל המהירויות הן בכוון x. ע"י כפל שתי המטריצות, הוכיחו את נוסחת **חיבור** המהירויות, כלומר,

$$\beta_{02} = \frac{\beta_{12} + \beta_{01}}{1 + \beta_{12}\beta_{01}}$$

כאשר β_{ij} היא המהירות של O_j כפי שהיא נמדדת ב-O_i.

שאלת בית: כבר אמרנו שישנה בעיה לתורה אם מהירויות גבוהות ממהירות האור. הראו שאם $\beta < 1$ וגם $v < 1$, אז תמיד מתקיים $v' < 1$.

שאלת בית: הוכיחו את נוסחאות הטרנספורמציה לתאוצה,

$$a'_x = \frac{a_x}{\gamma^3 (1-\beta v_x)^3}$$

$$a'_y = \frac{(1-\beta v_x) a_y + \beta v_y a_x}{\gamma^2 (1-\beta v_x)^3}$$

$$a'_z = \frac{(1-\beta v_x) a_z + \beta v_z a_x}{\gamma^2 (1-\beta v_x)^3}$$