פתרון תרגיל 2 בקורס חדוא 2

.1 $$\int (3-x^2)^3 dx = \int\left(-x^6+9x^4-27x^2+27\right)dx = -\frac{x^7}{7}+\frac{9x^5}{5}-\frac{27x^3}{3}+27x+C$$

.2 $$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx = \int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int\left(x^{0.5}+x^{-0.5}\right)dx = \frac{x^{1.5}}{1.5}+\frac{x^{0.5}}{0.5}+C$$

.3 $$\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}} = \left\{\begin{array}{l} x=\sqrt{\frac{2}{3}}\sin(t) \\ dx=\sqrt{\frac{2}{3}}\cos(t)dt \end{array}\right\} = \int \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\cos(t)dt}{\sqrt{2\left(1-\sin^2(t)\right)}} = \int \frac{1}{\sqrt{3}}dt = \frac{t}{\sqrt{3}}+C = \frac{\arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)}{\sqrt{3}}+C$$

דרך נוספת יותר פשוטה אחרי שהלכתי בדרך הנוראית הנל:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2}\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2}} = \left\{\begin{array}{l} t=\sqrt{\frac{3}{2}}x \\ dt=\sqrt{\frac{3}{2}}dx \end{array}\right\} = \int \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}dt}{\sqrt{2}\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(t)+C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)+C$$

.4 $$\int\sqrt{1-\sin(2x)}dx = \int\frac{\sqrt{1-\sin^2(2x)}}{\sqrt{1+\sin(2x)}}dx \overset{*}{=} \int\frac{\cos(2x)dx}{\sqrt{1+\sin(2x)}} = \left\{\begin{array}{l} t=1+\sin(2x) \\ dt=2\cos(2x)dx \end{array}\right\} =$$

$$= \int\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t}+C = \sqrt{1+\sin(2x)}+C$$

*הערה: זה נכון בתחום בו $\cos(2x)\geq 0$ אחרת הפתרון הוא מינוס הפונקציה שמצאנו.

.5 $$\int\left(e^{-x}+e^{-2x}\right)dx = -e^{-x}-\frac{e^{-2x}}{2}+C$$

6. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \left\{ \begin{array}{l} t=\sqrt{x^2+1} \\ dt=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}dx \\ x^2=t^2-1 \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{\left(t^2-1\right)} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(t-1) - \frac{1}{2}\ln(t+1) + C = \frac{1}{2}\ln(\sqrt{x^2+1}-1) - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{x^2+1}+1) + C$$

7. עלינו לפתור את $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$ זהו שבר חלקי, ונעקוב אחרי התהליך לפתרונו:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \left\{ \begin{array}{ll} f'=1 & g=\dfrac{1}{1+x^2} \\ f=x & g'=\dfrac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2} \end{array} \right\} = \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}dx =$$

$$= \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{1+x^2}{\left(1+x^2\right)^2}dx - 2\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx = \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{1}{1+x^2}dx - 2\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx$$

נעביר אגף ונקבל כי

$$2\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{x}{1+x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2} + \arctan(x) + C$$

ולכן $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} = \dfrac{\dfrac{x}{1+x^2}+\arctan(x)}{2} + C$

$$\int \frac{x^2}{\left(x^2-1\right)^2}dx=\int \frac{x^2-1}{\left(x^2-1\right)^2}dx+\int \frac{1}{\left(x^2-1\right)^2}dx=\int \frac{dx}{x^2-1}+\int \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2}dx=$$ .8

נפרק את הביטוי הימני לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{\left(x-1\right)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{\left(x+1\right)^2}$$

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{A(x-1)(x+1)^2+B(x+1)^2+C(x+1)(x-1)^2+D(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

יוצא כי

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{\left(x-1\right)^2}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{\left(x+1\right)^2}\right)$$

כעת הביטוי השמאלי הינו $\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$

ולכן סה"כ

$$\int \frac{x^2}{\left(x^2-1\right)^2}dx=\frac{1}{2}\left(\ln(|x-1|)-\ln(|x+1|)\right)+\frac{1}{4}\left(-\ln(|x-1|)-\frac{1}{x-1}+\ln(|x+1|)-\frac{1}{x+1}\right)+C$$

$$\int \cos^5(x)\sqrt{\sin(x)}dx=\left\{\begin{matrix} t=\sin(x) \\ dt=\cos(x)dx \\ \cos^2(x)=1-t^2 \end{matrix}\right\}=\int\left(1-t^2\right)^2\sqrt{t}dt=\int\left(t^{0.5}-2t^{2.5}+t^{4.5}\right)dt=$$ .9

$$=\frac{t^{1.5}}{1.5}-\frac{2t^{3.5}}{3.5}+\frac{t^{4.5}}{4.5}+C=\frac{\sin^{1.5}(x)}{1.5}-\frac{2\sin^{3.5}(x)}{3.5}+\frac{\sin^{4.5}(x)}{4.5}+C$$

10. $$\int x^3e^{-x^2}dx=\begin{Bmatrix} t=-x^2 \\ dt=-2xdx \end{Bmatrix}=\frac{-1}{2}\int\left(-te^t\right)dt=\frac{1}{2}\int te^t dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int te^t dt=\begin{Bmatrix} f'=e^t & g=t \\ f=e^t & g'=1 \end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\left(te^t-\int e^t dt\right)=\frac{1}{2}\left(te^t-e^t\right)+C=\frac{1}{2}\left(-x^2e^{-x^2}-e^{-x^2}\right)+C$$

11. $$\int \arcsin(x)dx=\begin{Bmatrix} t=\arcsin(x) \\ x=\sin(t) \\ dx=\cos(t)\,\mathrm{dt} \end{Bmatrix}=\int t\cos(t)dx=\begin{Bmatrix} f'=\cos(t) & g=t \\ f=\sin(t) & g'=1 \end{Bmatrix}=$$

$$=t\sin(t)-\int\sin(t)dt=t\sin(t)+\cos(t)+C=\arcsin(x)x+\cos(\arcsin(x))+C$$

שימו לב כי $\cos(\arcsin(x))=\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}=\sqrt{1-x^2}$

12. $$\int\frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}dx=\begin{Bmatrix} t=\sqrt{1+e^x} \\ x=\ln(t^2-1) \\ dt=\dfrac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}dx \end{Bmatrix}=\int 2\ln(t^2-1)dt=2\int\ln(t+1)dt+2\int\ln(t-1)dt=$$

$$=2\left((t+1)\ln(t+1)-(t+1)+(\mathrm{t}-1)\ln(\mathrm{t}-1)-(\mathrm{t}-1)\right)+C$$

מוזמנים להציב חזרה $t=\sqrt{1+e^x}$.

13. $$\int x^2e^{\sqrt{x}}dx=\begin{Bmatrix} t=\sqrt{x} \\ x=t^2 \\ dx=2tdt \end{Bmatrix}=\int t^4e^t\,2tdt=2\int t^5e^t dt$$

את זה ניתן לפתור על ידי שימוש חוזר (5 פעמים) באינטגרציה בחלקים.

14. $$\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx=\begin{Bmatrix} t=e^x+e^{-x} \\ dt=\left(e^x-e^{-x}\right)dx \end{Bmatrix}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left(e^x+e^{-x}\right)+C$$