פתרון מבחן מועד א' – 83-112 חדו"א 1 להנדסה – 29/01/23

מרצה: דר' ארז שיינר | משך המבחן: שלוש שעות | חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק' | ענו על כל השאלות | כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

<u>יש לכתוב את התשובות על גבי טופס המבחן במקום המתאים בלבד. מותר לכתוב משני צידי הדף.</u>

<u>מחברות הטיוטה מושלכות ולא תבדקנה.</u>

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^7)(\ln(1+3x))^5}{1-\cos(x^6)}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^7)}{x^7}\cdot\left(\frac{\ln(1+3x)}{3x}\right)^5\cdot\frac{(x^6)^2}{1-\cos(x^6)}\cdot 3^5=1\cdot 1^5\cdot 2\cdot 3^5=2\cdot 3^5$$

ב. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2\arctan(x)}{\pi}\right)^x$

ראשית נחשב את גבול בסיס החזקה

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2\arctan(x)}{\pi}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=1$$

לכן מותר להשתמש בכלל הe

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2\arctan(x)}{\pi}\right)^x=\left\{1^\infty,\text{כלל ה}e\right\}=e^{\lim_{x\to\infty}x\cdot\left(\frac{2\cdot\arctan(x)}{\pi}-1\right)}=e^{-\frac{2}{\pi}}$$

כיוון שגבול המעריך הוא

$$\lim_{x\to\infty}\underbrace{x}_{\to\infty}\cdot\left(\underbrace{\frac{2\arctan(x)}{\pi}-1}_{\to 0}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2\arctan(x)-\pi}{\pi}}{\frac{1}{x}}=\left\{\frac{0}{0},\text{לופיטל}\right\}==\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\frac{2}{1+x^2}}{\pi}}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{1+x^2}=\lim_{x\to\infty}-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{x^2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{x^2}+1}=-\frac{2}{\pi}$$

ג. $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{(n^2)}}{5^{2n}}$

$$\frac{2^{(n^2)}}{5^{2n}}=\left(\frac{2^n}{5^2}\right)^n\to\infty^\infty=\infty$$

.2

א. חשבו את $\int \frac{1}{x(\ln^2(x)-3\ln(x)+2)}dx$.

ראשית נבצע הצבה

$$\int \frac{1}{x(\ln^2(x)-3\ln(x)+2)}dx = \begin{Bmatrix} t=\ln(x) \\ dt=\frac{1}{x}dx \end{Bmatrix} = \int \frac{1}{t^2-3t+2}dt$$

כעת נבצע פירוק לשברים חלקיים של הפונקציה הרציונאלית

$$\frac{1}{t^2-3t+2} = \frac{1}{(t-1)(t-2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t-2} = \frac{A(t-2)+B(t-1)}{(t-1)(t-2)}$$

נשווה מונים

$$1 = A(t-2) + B(t-1)$$

נציב $t = 1,2$ ונקבל כי

$$A = -1$$

$$B = 1$$

לכן

$$\int \frac{1}{t^2-3t+2}dt = \int \frac{1}{t-2}dt - \int \frac{1}{t-1}dt = \ln|t-2| - \ln|t-1| + C =$$

ולבסוף נחזיר את ההצבה

$$= \ln|\ln(x)-2| - \ln|\ln(x)-1| + C$$

ב. חשבו את האינטגרל הבא $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$.

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{t\to\infty}[\arctan(x)]_0^t = \lim_{t\to\infty}\arctan(t) - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}$$

3. נביט בפונקציה $f(x) = x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$

א. חשבו את $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

כיוון שמדובר בגבול מהצורה $\infty - \infty$ נוציא גורם משותף

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) = x\left(\arctan(x) - \frac{\ln(x^2+1)}{2x}\right)$$

נחשב בנפרד את הגבול

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln(x)}{2x} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{2x}$$

הביטוי השמאלי שואף לאפס בעקבות משפט סדרי גודל, והביטוי הימני הוא מהצורה $\frac{0}{\infty}$ ולכן גם שואף לאפס.

שימו לב, אי אפשר היה מראש להשתמש בסדרי גודל כיוון שלא מדובר בחזקה של $\ln(x)$ אלא בלוג של ביטוי מורכב כלשהו.

נחזור לגבול המקורי, קיבלנו

$$\infty \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \infty$$

ב. הוכיחו כי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f(x) \geq 0$.

נגזור את הפונקציה

$$f'(x) = \arctan(x) + x \cdot \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2} = \arctan(x)$$

כיוון ש $\arctan(x)$ שלילי בשליליים וחיובי בחיוביים, הפונקציה f יורדת בתחום $(-\infty, 0]$ ועולה בתחום $[0, \infty)$

לכן המינימום הגלובאלי שלה הוא $f(0) = 0$ ולכן לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f(x) \geq f(0) = 0$

4. תהי פונקציה f הרציפה בכל הממשיים, ונביט בסדרה $a_n = n$.

א. הוכיחו או הפריכו: אם $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{a_n}\right) = 5$ אזי $\lim_{x\to 0} f(x) = 5$.

כיוון ש f רציפה ב$x = 0$ מתקיים כי

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

לפי הגדרת הגבול לפי היינה, עבור הסדרה $0 \neq \frac{1}{a_n} = \frac{1}{n} \to 0$ מתקיים כי

$$f\left(\frac{1}{a_n}\right) \to f(0)$$

וביחד $f(0) = 5$ והוכחנו את מה שצריך.

ב. הוכיחו או הפריכו: אם $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 5$ אזי $\lim_{x\to\infty} f(x) = 5$.

הפרכה:

$$f(x) = \sin(2\pi x) + 5$$

מתקיים כי

$$f(a_n) = f(n) = \sin(2\pi n) + 5 = 5$$

אבל לפונקציה אין גבול באינסוף כלל כיוון שעבור

$$b_n = n + \frac{1}{4} \to \infty$$

מתקיים כי

$$f(b_n) = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) + 5 = 6$$

כלומר מצאנו שתי סדרות השואפות לאינסוף, שכאשר מציבים אותן בפונקציה מקבלים גבולות שונים. לכן לפי ההגדרה לפונקציה אין גבול באינסוף.

5. תהי סדרה a_n המקיימת לכל n כי $a_{n+1} = \sqrt{3a_n - 2}$ וכן $a_1 = 6$.

א. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $a_n > 1$.

נוכיח באינדוקציה. עבור $n = 1$ אכן $a_1 = 6 > 1$.

יהי n עבורו $a_n > 1$ לכן $a_{n+1} = \sqrt{3a_n - 2} > \sqrt{3 - 2} = 1$

ב. הוכיחו כי הסדרה a_n מתכנסת וחשבו את גבולה.

ראשית נוכיח כי מדובר בסדרה מונוטונית יורדת (מדובר בניחוש מושכל לאחר הצבת ערכים ראשונים $6,4,\sqrt{10}$).

נוכיח באינדוקציה כי לכל n מתקיים כי $a_{n+1} < a_n$.

עבור $n = 1$ אכן

$$a_2 - a_1 = 4 - 6 < 0$$

יהי n עבורו $a_{n+1} < a_n$, צריך להוכיח כי $a_{n+2} < a_{n+1}$

נפתח את שני צידי אי השיוויון שצריך להוכיח בעזרת נוסחאת הנסיגה, ונקבל כי צריך להוכיח כי

$$\sqrt{3a_{n+1} - 2} < \sqrt{3a_n - 2}$$

נעלה את שני הצדדים בריבוע

$$3a_{n+1} - 2 < 3a_n - 2$$

נצמצם את -2 ונחלק ב3 ונקבל אי שיוויון שקול

$$a_{n+1} < a_n$$

אבל זה מתקיים לפי הנחת האינדוקציה.

כעת, לפי סעיף קודם אנו יודעים כי הסדרה חסומה מלרע, ולכן הסדרה מונוטונית יורדת וחסומה ולכן מתכנסת לגבול סופי.

נסמן את גבול הסדרה ב$a_n \to L \in \mathbb{R}$. נשאיף את שני צידי נוסחאת הנסיגה

$$\lim a_{n+1} = \lim \sqrt{3a_n - 2}$$

$$L = \sqrt{3L - 2}$$

ולכן

$$L^2 = 3L - 2$$

הפתרונות למשוואה הריבועית הם

$$L_{1,2} = 1,2$$

כיצד נדע מי מהם הוא הגבול?

נוכיח כי לכל n מתקיים כי $a_n > 2$ ולכן $L \geq 2$ ולכן הגבול $L = 1$ נפסל.

נעשה זאת באינדוקציה, בדומה מאד לסעיף א':

עבור $n = 1$ נתון כי $a_1 = 6 > 2$. יהי n עבורו $a_n > 2$ אזי $a_{n+1} = \sqrt{3a_n - 2} > \sqrt{3 \cdot 2 - 2} = 2$.

סה"כ הוכחנו כי $a_n \to 2$.

6.

א. חשבו את גבול הסדרה

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2n+4k}{n^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2n+4k}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2+\frac{4k}{n}}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\cdot\left(2+4\cdot\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

כאשר $f(x) = 2+4x$.

כיוון ש f רציפה בקטע $[0,1]$ מתקיים כי

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \to \int_0^1 (2+4x)dx = [2x+2x^2]_0^1 = 4$$

ב. קרבו את $\sqrt{5}$ עד כדי שגיאה של $h = \frac{1}{100}$.

נקרב את הביטוי עם הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$ סביב הנקודה המצוייה $a = 4$ בנקודה הרצוייה $x = 5$

ננחש $n = 2$ ונבדוק אם השגיאה אכן מתאימה.

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4\left(\sqrt{x}\right)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8\left(\sqrt{x}\right)^5}$$

לפי לגראנז' קיימת $4 < c < 5$ עבורה

$$R_2 = \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(5-4)^4 = \frac{3}{8\cdot 3!\cdot c^{\frac{5}{2}}}$$

נחסום את השגיאה בערך מוחלט על ידי הקטנה המכנה

$$|R_3| = \frac{3}{8 \cdot 3! \cdot c^{\frac{5}{2}}} < \frac{3}{8 \cdot 3! \cdot 4^{\frac{5}{2}}} = \frac{3}{8 \cdot 3! \cdot \sqrt{4}^5} = \frac{3}{8 \cdot 3! \cdot 2^5} < \frac{1}{100}$$

לכן $n = 2$ אכן מתאים.

נחשב את פולינום טיילור

$$P_3 = f(4) + f'(4)(x-4) + \frac{f''(4)}{2}(x-4)^2 = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{4 \cdot 2^3 \cdot 2}(x-4)^2$$

ולכן הקירוב הוא

$$\sqrt{5} = f(5) \approx P_3(5) = 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2^6}$$