## 88-112-תירגול 11-12:

### תמורות:

תמורה: תהא X קב' סופית. תמורה $\sigma$ על X היא פונקציה חח"ע ועל מ-X לעצמה. את אוסף התמורות מסמנים $S_X$ או $S_n$ עבור $|X| = n$ וניתן להראות ביתר קלות כי $|S_n| = n!$

$$\begin{pmatrix} 1 & \to & n - options \\ 2 & \to & n-1-options \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ n & \to & one \quad option \end{pmatrix}.$$

צורת כתיבה: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

לדוגמא: אם $1 \mapsto 2, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 3$ אז: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

סוגי תמורות:

מחזור: היא תמורה הפועלת על תת קבוצת אייברים ב-X באופן מעגלי ואיננה מזיזה את היתר, ניתן לכתוב אותה כ- $(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_k)$ כאשר $a_1 \mapsto a_2 \mapsto \ldots \mapsto a_k \mapsto a_1$. דוגמא:

את $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ממקודם ניתן לכתוב כ- $(1 \quad 2)$.

חילוף: הוא מחזור של שני אייברים בלבד.

הרכבת תמורות: כמקרה פרטי של פונקציה נגדיר הרכבת תמורות ע"י $\tau \circ \sigma(i) = \tau(\sigma(i))$

לדוגמא: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

פרוק תמורה למחזורים זרים ולחילופים:

במבט על תמורה $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ ניתן לפרק את הקב' X לתתי קבוצות זרות ע"י המחזורים הפועלים ב $\sigma$ (שימו לב שסדר ההרכבה בפרוק זה ניתן להחלפה) וכמו כן ניתן להגדיר את $\sigma$ כרצף של חילופים (לא בהכרח זרים).

דוגמא: $(3 \quad 4)(2 \quad 1)(6 \quad 2)(5 \quad 6) = (3 \quad 4)(1 \quad 5 \quad 6 \quad 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

הערה: בכתיבה המחזורית נהוג להשמיט את המחזורים מאורך 1.

<u>תמורת הזהות:</u> היא התמורה

$$Id \in S_n : \forall a_i \in X \qquad a_i \mapsto a_i \Rightarrow Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = (1)(2)\cdots(n)$$

<u>תמורה הפוכה:</u> לתמורה כלשהי $\sigma$ היא התמורה $\tau = \sigma^{-1}$ כך ש- $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma = Id$

דוגמא: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in S_4$ מצא $\tau = \sigma^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

בפועל, על מנת למצוא את האיבר ההופכי של מחזור כלשהו, יש להפוך את סדר האיברים במחזור.

כך למשל, ההופכי של $(1432)$ הוא $(2341)$

<u>ע"מ 68, 1.6א:</u>

יהי V מ"ו עם בסיס סדור $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$. עבור תמורה $\sigma \in S_n$ נסמן $B_\sigma = \{v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}\}$. יהי $v \in V$. הוכח

$$[v]_B = (\alpha_1, \quad \ldots \quad, \alpha_n) \Leftrightarrow [v]_{B\sigma} = (\alpha_{\sigma(1)}, \quad \ldots \quad, \alpha_{\sigma(n)})$$

פתרון:

ראשית נשים לב כי מהעובדה שתמורה היא פונקציה חח"ע ועל מ-V לעצמה נובע כי:

$$\forall j = 1, \ldots, n \quad \exists! i = 1, \ldots, n : \sigma(i) = j$$

לכן:

$$[v]_B = (\alpha_1, \quad \ldots \quad, \alpha_n) \Leftrightarrow v = \sum \alpha_j v_j \Leftrightarrow v = \sum \alpha_{\sigma(i)} v_{\sigma(i)} \Leftrightarrow [v]_{B\sigma} = (\alpha_{\sigma(1)}, \quad \ldots \quad, \alpha_{\sigma(n)})$$

<u>ע"מ 68, 1.9 (לא חובה, בהתאם לזמן):</u>

תהא $\sigma \in S_n$. נגדיר העתקה $T_\sigma : F^n \to F^n$ ע"י $T_\sigma(x_1, \ldots, x_n) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n)})$

א. הוכח $T_\sigma$ ה"ל

ב. מצא $[T_\sigma]$

פתרון:

א.

$$T_\sigma((x_1,\ldots,x_n) + k(y_1,\ldots,y_n)) \underset{z_i = x_i + ky_i}{=} T_\sigma(z_1,\ldots,z_n) =$$

$$(z_{\sigma^{-1}(1)},\ldots,z_{\sigma^{-1}(n)}) = (x_{\sigma^{-1}(1)},\ldots,x_{\sigma^{-1}(n)}) + k(y_{\sigma^{-1}(1)},\ldots,y_{\sigma^{-1}(n)}) =$$

$$T_\sigma(x_1,\ldots,x_n) + kT_\sigma(y_1,\ldots,y_n)$$

ב. $\left[T_\sigma\right]=\begin{pmatrix} | & & | \\ T(e_1) & \cdots & T(e_n) \\ | & & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} | & & | \\ e_{\sigma^{-1}1} & \cdots & e_{\sigma^{-1}n} \\ | & & | \end{pmatrix}$ כלומר מטריצה המורכבת מחילופי שורה בלבד ביחס למטריצת היחידה.

<u>היפוך סדר</u>: בתמורה הוא זוג $i,j\in\{1...,n\}$ כך ש $i<j$ וגם $\sigma(i)>\sigma(j)$.

<u>סימן של תמורה</u>: $sign\sigma=(-1)^{n(\sigma)}\quad \forall\sigma\in S_n$ כאשר $n(\sigma)$ הוא מס' היפוכי סדר ב- $\sigma$.

<u>זוגיות של תמורה</u>: תמורה $\sigma$ היא זוגית אמ"מ הסימן שלה הוא 1 ולכן אי זוגית אמ"מ הסימן שלה הוא 1-.

<u>שיטה נוספת לגילוי הסימן/זוגיות</u>: נרשום את התמורה כפרוק לחילופים ונקבע את זוגיותה בהתאם לזוגיות מס' החילופים. (שימו לב, קל יותר קודם לפרק למחזורים זרים ואז לחילופים).

דוגמא: $sign\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&5&3&4\end{pmatrix}=sign(1\quad 2)(3\quad 5\quad 4)=(1\quad 2)(4\quad 5)(3\quad 4)\Rightarrow$ א"ז

<u>תכונות חשובות:</u>

1. סימן של מחזור מאורך k הוא $(-1)^{k-1}$.
2. סימן של תמורה הוא מכפלת סימני מחזוריה הזרים.
3. סימן של הרכבת תמורות הוא מכפלת סימני מרכיביה.

## **<u>דטרמיננטות:</u>**

תהי $A\in F^{nxn}$. כל תמורה $\sigma\in S_n$ היא בחירת n מקומות ב-A: $a_{1,\sigma(1)},...,a_{n,\sigma(n)}$ (כלומר רכיב בודד לכל שורה ועמודה).

לדוגמא: $A=\begin{pmatrix}\underline{\underline{a_{11}}}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&\underline{\underline{a_{23}}}\\a_{31}&\underline{\underline{a_{32}}}&a_{33}\end{pmatrix}\Rightarrow\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$.

<u>דטרמיננטה:</u> $A\in F^{nxn}$. אזי: $\det(A)=|A|=\sum_{\sigma\in S_n}sign(\sigma)a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}$.

דוגמא:

1. $A=(a_{ij})\in F^{2x2}$. ראשית נבין מי הם איברי $S_2$ וסימניהם:

$$\begin{array}{cc} S_2=\{Id, & (1\quad 2)\} \\ \downarrow & \downarrow \\ \text{זוגית} & \text{א"ז} \end{array}$$

ולכן: $|A|=\sum_{\sigma\in S_2}sign(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

2. $A=\left(a_{ij}\right)\in F^{3x3}$ . ראשית נבין מי הם איברי $S_3$ וסימניהם:

$$S_3=\left\{Id,\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{array}{cccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{זוגית} & \text{א"ז} & \text{א"ז} & \text{א"ז} & \text{זוגית} & \text{זוגית} \end{array}$$

ולכן:

$$|A|=\sum_{\sigma\in S_2}sign(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{32}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

נשים לב ש-

$$a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{32}+a_{13}a_{21}a_{32}=$$

$$a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+a_{13}(-a_{22}a_{31}+a_{21}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{32})=$$

$$a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

ודטרמיננטות 2x2 אנו יודעים לחשב ביתר קלות.

<u>מסקנה: פיתוח דטרמיננטות לפי מינורים.</u>

$A\in F^{nxn}$ . המינור ה-ij של A הוא התת מטריצה $M_{ij}$ מגודל $(n-1)x(n-1)$ המתקבלת ע"י מחיקת השורה ה-i והעמודה ה-j ב-A.

לדוגמא:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}\Rightarrow M_{22}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 7 & 9\end{pmatrix}$$

<u>הגדרת הדטרמיננטה בפיתוח לפי שורה/עמודה:</u>

**פיתוח לפי השורה ה-i :**

$$|A|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|M_{ij}|$$

**פיתוח לפי העמודה ה-j :**

$$|A|=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|M_{ij}|$$

זוהי בניה רקורסיבית עם הבסיס 2x2: $\begin{vmatrix}a_{ij} & a_{il}\\ a_{kj} & a_{kl}\end{vmatrix}=a_{ij}a_{kl}-a_{il}a_{kj}$ .

דוגמא:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&4\\0&8&-1\end{pmatrix}\Rightarrow|A|=(-1)^{1+1}\cdot1\cdot\begin{vmatrix}1&4\\8&-1\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\cdot0\cdot\begin{vmatrix}3&4\\0&-1\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\cdot2\cdot\begin{vmatrix}3&1\\0&8\end{vmatrix}=-1-32-0(-3+0)+2(24-0)=15$$

<u>מסקנה</u>: יהיה הכי קל לפתח לפי שורה/עמודה בעלת הכי הרבה אפסים.

<u>משפט</u>: המטריצה A הפיכה אמ"מ הדטרמיננטה שלה איננה מתאפסת.

<u>ע"מ 70, 2.6:</u>

בדוק איזו מהמטריצות הבאות הפיכה כאשר $a,b\in R$:

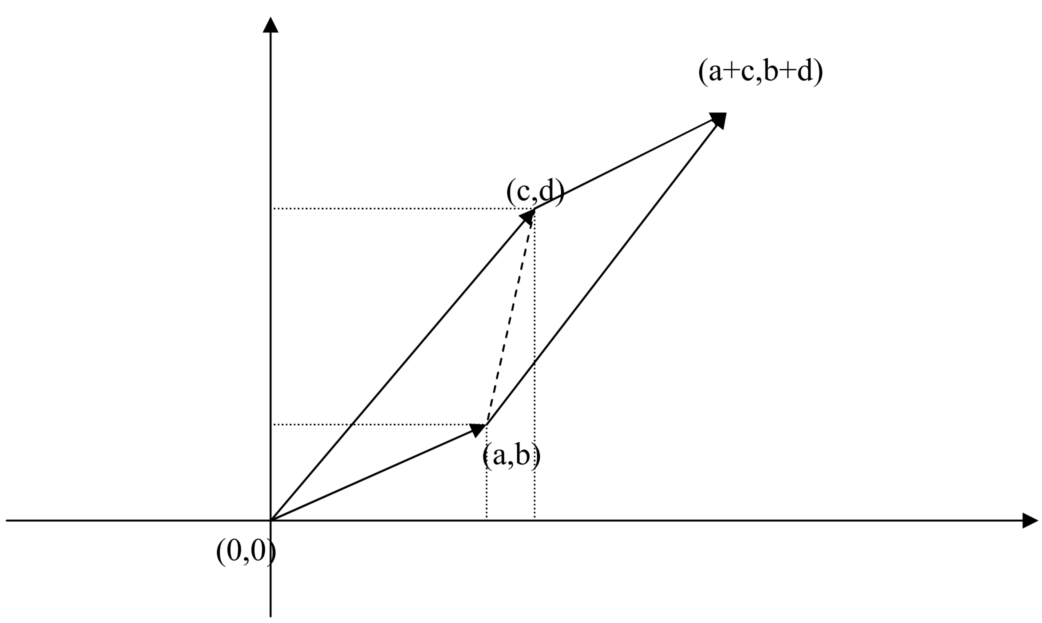
$$|A|=\left|\begin{pmatrix}a&b\\a&b\end{pmatrix}\right|=ab-ba=0\Rightarrow$$ לא

$$|B|=\left|\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}\right|=a^2+b^2$$

אז B תהיה הפיכה כאשר a או b שונות מאפס.

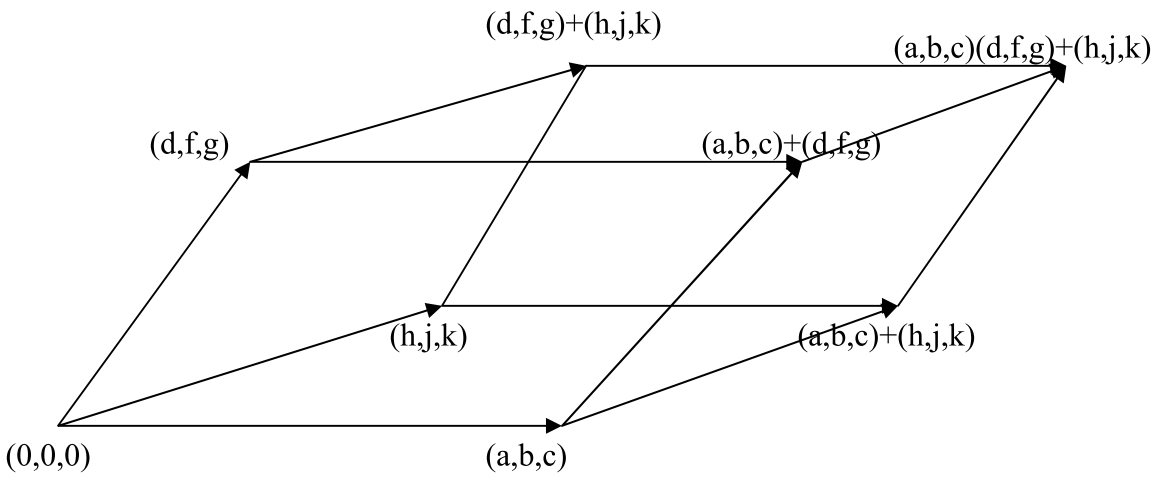
<u>ע"מ 70, 2.8:</u>

**איך מחשבים שטח של מקבילית במישור בעזרת דטרמיננטות?**



$$S = 2\cdot\left(\frac{cd}{2}-\frac{ab}{2}-\frac{(b+d)(c-a)}{2}\right) = ad-bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \rightarrow$$ הוקטורים הבונים של המקבילית

באותו אופן:




$$S = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & f & g \\ h & j & k \end{vmatrix}$$

<u>תכונות חשובות:</u>

1. אם ב-A שורת/עמודת אפסים אז det(A)=0
2. אם A משולשית (ובפרט אלכסונית) אז $\det(A) = \prod a_{ii}$
3. אם A מטריצת בלוקים משולשית אז $\det(A) = \prod |A_{ii}|$ (כמובן ש $A_{ij}$ הם הבלוקים).
4. דטרמיננטה היא פונקציה כיפלית $|AB| = |A||B|$, בפרט חזקתית $|A^m| = |A|^m$ ובפרט (אם המטריצה הפיכה) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.
5. חשוב לציין שפעולות שורה/עמודה משפיעות על הדטרמיננטה, כלומר למטריצות שקולות שורה לאו דווקא תהיה אותה הדטרמיננטה!

   אם נסמן את המטריצות האלמנטריות $E_{i,j}, E_{\alpha\cdot i}, E_{i+\alpha\cdot j}$ כפי שעשינו בעבר אז:

   $$|E_{i,j}A| = -|A|$$
   $$|E_{\alpha\cdot j}A| = \alpha|A|$$
   $$|E_{i+\alpha\cdot j}A| = |A|$$
6. כתוצאה מ-5: $|\alpha A| = \alpha^n |A|$

7. $|A| = |A^t|$

<u>דוגמאות:</u>

1.

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot(2)$$

2.

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -14 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix} = (-1)(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 10 & 14 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -6\cdot 1\cdot 1\cdot(-3)$$

3. יהיו B,A מטריצות כך שידוע $|A| = 2$. חשב $|B^{-1}AB|, \left|(B^{-1}AB)^9\right|, \left|(A^{-1})^t\right|$.

$$|B^{-1}AB| = |B^{-1}||A||B| = |B|^{-1}|A||B| = |A|,$$

$$\left|(B^{-1}AB)^9\right| = |B^{-1}AB|^9 = (|B^{-1}||A||B|)^9 = |A|^9,$$

$$\left|(A^{-1})^t\right| = |A^{-1}| = |A|^{-1}$$