<u>פתרון תרגיל בית מספר 1</u>

<u>שאלה 1</u>

הוכח שבשדה מתקיימים התכונות הבאות:

א. לכל $a\in\mathbb{F}$ מתקיים $-(-a)=a$.

ב. לכל $a\in\mathbb{F}$ מתקיים $(-1)\cdot a=-a$.

ג. לכל שני איברים $a,b\in\mathbb{F}$ מתקיים $(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$.

<u>פתרון</u>

א. יהי $a\in\mathbb{F}$. בשדה לכל איבר יש איבר נגדי. נסמן $b=-a$.

ז"א $a+b=0$ ולכן a הוא איבר נגדי של b ז"א $a=-b=-(-a)$.

ב. יהי $a\in\mathbb{F}$ ויהי 1 האיבר הניטראלי לכפל בשדה ויהי -1 האיבר הנגדי ל 1.

$$0=0\cdot a=(1+(-1))\cdot a=1\cdot a+(-1)\cdot a=a+(-1)\cdot a.$$

סה"כ קיבלנו ש $a+(-1)\cdot a=0$ ולכן $(-1)\cdot a$ הוא האיבר הנגדי ל a ז"א $(-1)\cdot a=-a$.

ג. יהיו $a,b\in\mathbb{F}$. מסעיף קודם $-a=(-1)\cdot a,-b=(-1)\cdot b$.

$$(-a)\cdot(-b)=(-1)\cdot a\cdot(-1)\cdot b=(-1)\cdot(-1)\cdot a\cdot b.$$

נשאר להוכיח ש $(-1)\cdot(-1)=1$. מסעיף ב $(-1)\cdot(-1)=-(-1)$ מסעיף א $-(-1)=1$.

<u>שאלה 2</u>

הוכח שאם $char(\mathbb{F})\neq 0$, אזי $char(\mathbb{F})$ הוא מספר ראשוני.

(רמז: הוכח ש $(n\cdot 1_F)\cdot(m\cdot 1_F)=(nm)\cdot 1_F$).

<u>פתרון</u>

$\overbrace{(1_{\mathbb{F}}+1_{\mathbb{F}}+...+1_{\mathbb{F}})}^{n-times}\cdot\overbrace{(1_{\mathbb{F}}+1_{\mathbb{F}}+...+1_{\mathbb{F}})}^{m-times}=\overbrace{(1_{\mathbb{F}}+1_{\mathbb{F}}+...+1_{\mathbb{F}})}^{mn-times}$, ולכן $(n\cdot 1_F)\cdot(m\cdot 1_F)=(nm)\cdot 1_F$.

אם $char(\mathbb{F})$ אינו ראשוני אז קיימים m,n כך ש $m\cdot n=char(\mathbb{F})$.

מכיוון ש $m<m\cdot n$ ו $n<m\cdot n$ אז $n\cdot 1_{\mathbb{F}}\neq 0,m\cdot 1_{\mathbb{F}}\neq 0$ אבל $(nm)\cdot 1_{\mathbb{F}}=0$.

<u>שאלה 3</u>

הוכח שהקבוצה $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]:=\left\{a+b\sqrt{2}:a,b\in\mathbb{Q}\right\}$, עם פעולות החיבור והכפל של שדה הממשיים היא שדה.

<u>פתרון</u>

נראה שכל האקסיומות מתקיימות.

<u>מוגדרות:</u>

יהיו $a+b\sqrt{2},c+d\sqrt{2}\in\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$.

ז"א $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$ מכיוון ש $\mathbb{Q}$ שדה קיים איבר יחיד $a+b$ $\mathbb{Q}$ ואיבר יחיד $b+d$ ב $\mathbb{Q}$.

ולכן קיים איבר יחיד $\left(a+c\right)+\left(b+d\right)\sqrt{2}\in\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$.

נשים לב שפעולת החיבור היא כמו פעולת החיבור על שדה הממשיים והאיברים $a+b\sqrt{2},c+d\sqrt{2}$ שייכים לשדה הממשיים, ולכן מתקיים:

$$(*)\quad a+b\sqrt{2}+c+d\sqrt{2}=a+c+b\sqrt{2}+d\sqrt{2}=a+c+\left(b+d\right)\sqrt{2}$$

השוויון הראשון נובע מאקסיומת החילוף והשוויון השני נובע מאקסיומת הפילוג.

בנוסף פעולת הכפל היא כמו פעולת הכפל על שדה הממשיים והאיברים $a+b\sqrt{2},c+d\sqrt{2}$ שייכים לשדה הממשיים, ולכן מתקיים:

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)\left(c+d\sqrt{2}\right)=ac+ad\sqrt{2}+bc\sqrt{2}+2bd=ac+2bd+\left(ad+bc\right)\sqrt{2}$$

השוויון הראשון נובע מאקסיומת הפילוג והשוויון השני נובע מאקסיומת הפילוג ומאקסיומת החילוף.

מכיוון ש $\mathbb{Q}$ שדה קיים איבר יחיד $ac+2bd\in\mathbb{Q}$ ואיבר יחיד $ad+bc\in\mathbb{Q}$.

<u>חילוף</u>

יהיו $a+b\sqrt{2},c+d\sqrt{2}\in\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$

מכיוון שפעולת החיבור היא כמו פעולת החיבור על שדה הממשיים והאיברים $a+b\sqrt{2},c+d\sqrt{2}$ שייכים לשדה הממשיים מתקיים:

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)+\left(c+d\sqrt{2}\right)=a+b\sqrt{2}+c+d\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}+a+b\sqrt{2}=\left(c+d\sqrt{2}\right)+\left(a+b\sqrt{2}\right)$$
.

השוויון הראשון נובע מקיבוץ השוויון השני נובע מחילוף והשלישי מקיבוץ.

בנוסף פעולת הכפל היא כמו פעולת הכפל על שדה הממשיים והאיברים $a+b\sqrt{2},c+d\sqrt{2}$ שייכים לשדה הממשיים, ולכן מתקיים:

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)\left(c+d\sqrt{2}\right)=ac+ad\sqrt{2}+bc\sqrt{2}+2bd=ac+bc\sqrt{2}+ad\sqrt{2}+2bd=$$
$$=c\left(a+b\sqrt{2}\right)+d\sqrt{2}\left(a+b\sqrt{2}\right)=\left(c+d\sqrt{2}\right)\left(a+b\sqrt{2}\right)$$

השוויון הראשון נובע מפילוג השוויון, השני נובע מחילוף והשלישי והרביעי מפילוג.

<u>איבר נטרלי לחיבור</u>

$0+0\sqrt{2}$ - יהי $a+b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ מכיוון ש $a+b\sqrt{2}$ שייך לשדה הממשיים ו 0 הוא האיבר נטרלי לחיבור בשדה הממשיים נקבל ש $a+b\sqrt{2}+0+0\sqrt{2}=a+b\sqrt{2}$.

<u>איבר נטרלי לכפל</u>

$1+0\sqrt{2}$ - - יהי $a+b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ מכיוון ש $a+b\sqrt{2}$ שייך לשדה הממשיים ו 1 הוא האיבר נטרלי לכפל בשדה הממשיים נקבל ש $\left(a+b\sqrt{2}\right)\left(1+0\sqrt{2}\right)=a+b\sqrt{2}$.

<u>איבר נגדי</u>

יהי $a+b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ מכיוון שקבוצת הרציונלים היא שדה אז ל - a יש איבר נגדי בקבוצת הרציונלים נסמן אותו ב $-a$. באותו אופן ל b יש איבר נגדי בקבוצת הרציונלים נסמן אותו ב $-b$.

ז"א $-a-b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$.

סה"כ נקבל $\left(a+b\sqrt{2}\right)+\left(-a-b\sqrt{2}\right)=\left(a-a\right)+\left(b-b\right)\sqrt{2}=0+0\sqrt{2}$.

השוויון הראשון נובע מ * בהוכחת המוגדרות.

<u>איבר הופכי</u>

יהי $a+b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ האיבר ההופכי הוא $\frac{a}{a^2-2b^2}+\frac{-b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}$ (בדוק!)

את ההוכחה לפילוג וקיבוץ אני משאיר לכם.

<u>שאלה 4</u>

פתור את המשוואות הבאות:

א. $z^3-10z^2+34z=0$.

ב. $z^2-\left(1-3i\right)z-2i-2=0$.

ג. $\left(i+1\right)\left(x+iy\right)=4+2i$. x,y מספרים ממשיים.

<u>פתרון</u>

א.

$$z^3-10z^2+34z=0$$

$z\left(z^2-10z+34\right)=0$ או ש $z=0$ או ש $z^2-10z+34=0$.

$$z^2-10z+34=0$$
$$z=\frac{10\pm\sqrt{\left(-10\right)^2-4\cdot1\cdot34}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{-36}}{2}$$
$$z_1=5+3i$$
$$z_2=5-3i$$

תשובה סופית: $z_1=5+3i, z_2=5-3i, z_3=0$.

ב.

$$z^2-\left(1-3i\right)z-2i-2=0$$
$$z=\frac{1-3i\pm\sqrt{\left(1-3i\right)^2+8i+8}}{2}=\frac{1-3i\pm\sqrt{2i}}{2}$$

ראינו בתרגול ש $\left(1+i\right)^2=2i$

$$z=\frac{1-3i\pm\left(1+i\right)}{2}$$
$$z_1=1-i$$
$$z_2=-2i$$

תשובה סופית: $z_1=1-i, z_2=-2i$.

ג.

$$\left(i+1\right)\left(x+iy\right)=4+2i$$
$$x-y+\left(x+y\right)i=4+2i$$

בתרגול ראינו ש $a+bi=c+di\leftrightarrow a=c\wedge b=d$.

לכן יש לפתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases}x-y=4\\x+y=2\end{cases}\to x=3, y=-1$$

תשובה סופית: $x=3, y=-1$.

שאלה 5

חשב, ללא שימוש במשפט דה מואבר, את הביטויים הבאים:

א. $\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)^8$.

ב. $\frac{5}{3+2i}$.

ג. $\left(1+i+i^2+...+i^{34}\right)^{71}$.

פתרון

א. $256=16\left(2i\right)^4=16\left(\left(1+i\right)^2\right)^4=\left(\sqrt{2}\right)^8\left(1+i\right)^8=\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)^8$.

ב. $\frac{5}{3+2i}=\frac{5}{3+2i}\cdot\frac{3-2i}{3-2i}=\frac{15-10i}{13}=\frac{15}{13}-\frac{10}{13}i$.

ג. $\left(1+i+i^2+...+i^{34}\right)^{71}$

תחילה נחשב את הסכום $1+i+i^2+...+i^{34}$

נשים לב ש $1+i+i^2+i^3=0$ ובאופן כללי לכל n טבעי מתקיים $i^{4n}+i^{4n+1}+i^{4n+2}+i^{4n+3}=0$.

ולכן $1+i+i^2+...+i^{34}+i^{35}=0\rightarrow 1+i+i^2+...+i^{34}=-i^{35}$.

$i^{35}=i^{4\cdot 8}\cdot i^3=-i$.

כעת $\left(1+i+i^2+...+i^{34}\right)^{71}=\left(-i\right)^{71}=-i^{71}=-i^{4\cdot 17}\cdot i^3=i$.

שאלה 6

א. הראה שלכל מספר מרוכב $z=a+bi$ יש הופכי ונגדי.

ב. הוכח שלכל שני מספרים מרוכבים z_1, z_2 (השונים מ 0) מתקיים $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$.

ג. בסדרה הנדסית נתון: $a_1=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, a_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.
הוכח שלכל n טבעי סכום 6n האיברים הראשונים הוא 0.

ד. פתור, בעזרת משפט דה מאובר, את המשוואות הבאות:

i. $z^7=1$.

ii. $z^4=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{10}$.

פתרון

ג. תחילה נמצא את מנת הסדרה.

$$\frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}\cdot\frac{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

נחשב את הביטוי $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6$.

תחילה נציג את המספר $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ בצורה קוטבית. $r^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\to r=1$.

$\tan\theta=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}\to\theta=60^0$. הנקודה $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ נמצאת ברביע הראשון, ולכן

$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos 60^0+i\sin 60^0$.

סה"כ נקבל: $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6=\left(\cos 60^0+i\sin 60^0\right)^6=\cos 360^0+i\sin 360^0=1$

נחשב את הסכום של הסדרה ההנדסית.

מנת הסדרה היא $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

$$S_{6n}=\frac{a_1\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{6n}-1\right)}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-1}=\frac{a_1\left(1^n-1\right)}{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=0.$$

ד.

$1=\cos\left(360^0k\right)+i\sin\left(360^0k\right)$ כאשר k מספר שלם.

$$z^7=\cos\left(360^0k\right)+i\sin\left(360^0k\right)$$
$$z_k=\cos\left(\frac{360^0k}{7}\right)+i\sin\left(\frac{360^0k}{7}\right)$$
$$k=0,1,2,\ldots,6$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{10}=\left(\cos 45^0+i\sin 45^0\right)^{10}=\cos 450^0+i\sin 450^0=\cos 90^0+i\sin 90^0$$

דרך נוספת לחישוב:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{10}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}\left((1+i)^2\right)^5=\frac{1}{2^5}\cdot 2^5\cdot i^5=i=\cos 90^0+i\sin 90^0$$

$$z^4=\cos\left(90^0+360^0k\right)+i\sin\left(90^0+360^0k\right)$$
$$z_k=\cos\left(18^0+72^0k\right)+i\sin\left(18^0+72^0k\right)$$
$$k=0,1,2,3$$

<u>שאלת בונוס</u>

חשב את הסכום $\sin\alpha+\sin(3\alpha)+...+\sin(2n-1)\alpha$ (רמז: משפט דה מאובר)

הדרכה לשאלה:

א. הראה שהסדרה:
$$(\cos\alpha+i\sin\alpha),(\cos(3\alpha)+i\sin(3\alpha)),...,(\cos(2n-1)\alpha+i\sin(2n-1)\alpha)$$
היא סדרה הנדסית.

ב. חשב את סכום הסדרה בעזרת הנוסחה שהראינו בתרגול.

ג. שים לב שבמספרים מרוכבים $a+bi=c+di\leftrightarrow a=c\wedge b=d$.

<u>פתרון</u>

נשתמש במשפט דה מאובר: $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos(n\alpha)+i\sin(n\alpha)$

נתבונן בסדרה:

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha),(\cos\alpha+i\sin\alpha)^3,(\cos\alpha+i\sin\alpha)^5,...,(\cos\alpha+i\sin\alpha)^{2n-1}$$

נקבל סדרה הנדסית עם n איברים שמנתה $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^2$ וממשפט דה מאובר נקבל ש $q=(\cos(2\alpha)+i\sin(2\alpha))$.

הוכחנו בתרגול שסכום סדרה הנדסית: $S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$ $q\neq 1$.

מקרה א: $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+2\pi k$ כאשר $k\in\mathbb{Z}$ במקרה זה מנת הסדרה שונה מ 1.

$$S_n=\frac{(\cos\alpha+i\sin\alpha)\left((\cos(2\alpha)+i\sin(2\alpha))^n-1\right)}{(\cos(2\alpha)+i\sin(2\alpha))-1}=\frac{(\cos\alpha+i\sin\alpha)\left((\cos(2n\alpha)+i\sin(2n\alpha))-1\right)}{(\cos(2\alpha)+i\sin(2\alpha))-1}$$

נשתמש בזהות הטריגונומטרית $\cos(2\beta)=1-2\sin^2\beta$ ונקבל (*) $\cos(2\beta)-1=-2\sin^2\beta$.

שימו לב שמזהות (*) $\cos(2n\alpha)-1=-2\sin^2(n\alpha)$ ו $\cos(2\alpha)-1=-2\sin^2(\alpha)$.

$$S_n=\frac{\left(\cos\alpha+i\sin\alpha\right)\left(i\sin\left(2n\alpha\right)+\cos\left(2n\alpha\right)-1\right)}{i\sin\left(2\alpha\right)+\cos\left(2\alpha\right)-1}=\frac{\left(\cos\alpha+i\sin\alpha\right)\left(i\sin\left(2n\alpha\right)-2\sin^2\left(n\alpha\right)\right)}{i\sin\left(2\alpha\right)-2\sin^2\left(\alpha\right)}$$

נשתמש בזהות הטריגונומטרית $\sin\left(2\alpha\right)=2\sin\alpha\cos\alpha$ ואז $\sin\left(2n\alpha\right)=2\sin n\alpha\cos n\alpha$

$$S_n=\frac{\left(\cos\alpha+i\sin\alpha\right)\left(i2\sin\left(n\alpha\right)\cos\left(n\alpha\right)-2\sin^2\left(n\alpha\right)\right)}{i2\sin\left(\alpha\right)\cos\left(\alpha\right)-2\sin^2\left(\alpha\right)}=\frac{2\sin\left(n\alpha\right)\left(\cos\alpha+i\sin\alpha\right)\left(i\cos\left(n\alpha\right)-\sin\left(n\alpha\right)\right)}{2\sin\left(\alpha\right)\left(i\cos\left(\alpha\right)-\sin\left(\alpha\right)\right)}=$$

$$=\frac{\sin\left(n\alpha\right)\left(\cos\alpha+i\sin\alpha\right)\left(-\sin\left(n\alpha\right)+i\cos\left(n\alpha\right)\right)}{\sin\left(\alpha\right)\left(-\sin\left(\alpha\right)+i\cos\left(\alpha\right)\right)}$$

נשתמש בזהות הטריגונומטריות $\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ ו $\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

$$S_n=\frac{\sin\left(n\alpha\right)\left(\cos\alpha+i\sin\alpha\right)\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}-n\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-n\alpha\right)\right)}{\sin\left(\alpha\right)\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)}$$

נשתמש בזהות הטריגונומטרית $-\cos\alpha=\cos\left(\pi-\alpha\right)$ ו $\sin\alpha=\sin\left(\pi-\alpha\right)$.

$$S_n=\frac{\sin\left(n\alpha\right)\left(\cos\alpha+i\sin\alpha\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+n\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\alpha\right)\right)}{\sin\left(\alpha\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)}=$$

$$=\frac{\sin\left(n\alpha\right)}{\sin\alpha}\cdot\left(\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}+n\alpha-\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}+n\alpha-\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=$$

$$=\frac{\sin\left(n\alpha\right)}{\sin\alpha}\cdot\left(\cos\left(n\alpha\right)+i\sin\left(n\alpha\right)\right)=$$

ניקח את החלק המדומה ונקבל שהסכום המבוקש הוא $\frac{\sin^2\left(n\alpha\right)}{\sin\alpha}$