תרגיל בית 5 במבוא לתורת החבורות
סמסטר א' תש"ף

שאלה 1. מצאו את כל הקוסטים ב-$\mathbb{Z}_{30}/\left\langle 3\right\rangle$. מהו האינדקס של תת-החבורה?

שאלה 2. תהי G חבורה ותהינה $H,K\leq G$ תת־חבורות סופיות שלה.

א. הוכיחו שאם $|H|=77, |K|=1000$, אז $H\cap K=\{e\}$.

ב. יהי p מספר ראשוני. הוכיחו שאם $|H|=|K|=p$ וגם $H\neq K$, אז $H\cap K=\{e\}$.

שאלה 3 (חזרה לבדידה)**.** תהי G חבורה ויהיו $A,B\subseteq G$ תת־קבוצות שלה. לכל סעיף כתבו פסוק לוגי שקול אך ורק עם כמתים (כמו $\forall$ ו-$\exists$) ושיוויונות מן הצורה $xy=zw$ עבור איברים של הקבוצות.

א. $ab=ba$ לכל איבר a של A ואיבר b של B.

ב. $aB=Ba$ לכל איבר a של A.

ג. $AB=BA$ (קבוצה כזו מוגדרת כקבוצת המכפלות איבר-איבר).

נסו למצוא דוגמאות שמראות שיש הבדל בין הסעיפים השונים ומי גורר את מי.

שאלה 4. הוכיחו שאם $H\leq G$, אז $H\lhd G$ אמ"מ לכל $x,y\in G$, $xy\in H$ אמ"מ $yx\in H$.

שאלה 5. נסתכל על החבורה S_4. נגדיר תת־קבוצה שלה

$$V=\{\text{id},(1\ 2)\,(3\ 4)\,,(1\ 3)\,(2\ 4)\,,(1\ 4)\,(2\ 3)\}$$

שנקראת חבורת הארבעה של קליין. הוכיחו את הטענות הבאות:

א. $V\lhd S_4$ (צ"ל שהיא ת"ח ושהיא נורמלית).

ב. כל חבורה מסדר 4 איזומורפית ל-$\mathbb{Z}_4$ או ל-V (חשיבה על $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ יכולה לעזור).

ג. כל חבורה מסדר 5 ומטה היא אבלית (בפרט V אבלית).

שאלה 6. הפריכו את הטענות השגויות הבאות:

א. כל תת־חבורה נורמלית היא אבלית.

ב. כל תת־חבורה אבלית היא נורמלית.

ג. התמונה של כל הומומורפיזם $f\colon G\to H$ היא תת־חבורה נורמלית של H.

ד. אם חבורת המנה G/N סופית ולא טריוויאלית, אז G סופית.

ה. אם חבורת המנה G/N ציקלית ולא טריוויאלית, אז G אבלית.

שאלה 7. נראה שאיזומורפיות בתת־חבורות נורמליות ובחבורות המנה ביחד עדין לא גורר איזומורפיות בחבורה "למעלה".

א. תנו דוגמה לחבורה אבלית G_1 ולחבורה לא אבלית G_2, שיש להן תת־חבורות נורמליות $H_1 \lhd G_1$ ו-$H_2 \lhd G_2$, כך שמתקיים $H_1 \cong H_2$ וגם ${}^{G_1}/_{H_1} \cong {}^{G_2}/_{H_2}$. רמז: אפשר למצוא דוגמאות כאלו כבר לחבורות מסדר 6 או 8.

ב. כמו בסעיף הקודם, אבל הפעם נדרוש ששתי החבורות G_1, G_2 הן אבליות ולא איזומורפיות. רמז: אפשר לבחור חבורות מסדר p^2 עבור p ראשוני.

בהצלחה!