

פתרון תרגיל בית 1 בתורת החבורות 88-218 סמסטר א' תש"ף

שאלה 1 (חימום). יהיו מספרים שלמים, ונניח $n|m$. האם בהכרח $n|m - m$? האם בהכרח $2m|n - m$? האם בהכרח $m \nmid n$ (כלומר m לא מחלק את n)? פתרו. כן, כן, לא. למה לא? הוכיחו ש- $n|m$ וגם $m|n$, אם ורק אם $n = \pm m$.

שאלה 2 (חימום). יהי p מספר ראשוני. מצאו את כל המספרים $x \in \mathbb{Z}$ כך ש- $x|p$. פתרו. המספרים $1, p, -1, -p$.

שאלה 3 (חימום). יהי n מספר טבעי. הגדרנו יחס על \mathbb{Z} לפיו נאמר כי $a, b \in \mathbb{Z}$ שקולים מודולו n אם $n|a - b$, וסימנו יחס זה כ- $a \equiv b \pmod{n}$. הוכיחו כי שקילות מודולו n היא אכן יחס שקילות (כלומר יחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי).

פתרו. היחס רפלקסיבי כי לכל $a \in \mathbb{Z}$ מתקיים כי $n|0$. לכן $n|a - a$, כלומר $a \equiv a \pmod{n}$. היחס סימטרי כי אם $n|x$, אז גם $n|-x$. בפרט

$$a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow n|(a - b) \Leftrightarrow n|(b - a) \Leftrightarrow b \equiv a \pmod{n}$$

היחס טרנזיטיבי כי אם $n|x$ וגם $n|y$, אז $n|x + y$. בפרט אם $a \equiv b \pmod{n}$ וגם $b \equiv c \pmod{n}$, אז

$$n|(a - b) \wedge n|(b - c) \Rightarrow n|(a - b + b - c) \Rightarrow n|(a - c)$$

כלומר $a \equiv c \pmod{n}$.

שאלה 4. יהי n מספר טבעי. נסמן את הכפולות שלו ב- $n\mathbb{Z} = \{0, \pm n, \pm 2n, \dots\}$. למשל $4\mathbb{Z} = \{\dots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \dots\}$. נזכיר כי סימנו $\gcd(a, b) = (a, b)$.

א. הוכיחו כי b מחלק את a אם ורק אם $a\mathbb{Z} \subseteq b\mathbb{Z}$.

ב. נגדיר סכום על קבוצות כאלו לפי $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{\alpha + \beta : \alpha \in a\mathbb{Z}, \beta \in b\mathbb{Z}\}$. הוכיחו כי מתקיים $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = (a, b)\mathbb{Z}$.

ג. הוכיחו כי $(a, b) \cdot (a, c)\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z} + bc\mathbb{Z}$. רמז: העזרו בסעיפים הקודמים.

פתרו.

א. מצד אחד, אם $a\mathbb{Z} \subseteq b\mathbb{Z}$, אזי בפרט $a \in b\mathbb{Z}$. לכן קיים $n \in \mathbb{Z}$ כך שמתקיים $a = bn$, כלומר $b|a$. מצד שני, אם $b|a$, אז קיים $n \in \mathbb{Z}$ כך שמתקיים $a = bn$. לכן אם $x \in a\mathbb{Z}$, קיים $m \in \mathbb{Z}$ כך ש- $x = am$ ולכן $x = bnm$, כלומר $x \in b\mathbb{Z}$.

ב. נוכיח בהכלה דו-כיוונית. נתחיל עם \subseteq : ידוע כי ניתן להציג את (a, b) כצירוף לינארי של a, b . כלומר קיימים $u, v \in \mathbb{Z}$ כך שמתקיים $(a, b) = au + bv$. יהי $x \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$, ולכן קיימים $n_a, n_b \in \mathbb{Z}$ כך ש- $x = an_a + bn_b$. אנו צריכים למצוא $m \in \mathbb{Z}$ כך שיתקיים $(a, b)m = an_a + bn_b$. אפשר לבחור את $m = \frac{a}{(a,b)}n_a + \frac{b}{(a,b)}n_b$. הכיוון השני \supseteq הוא יותר קל כי ידוע לנו שניתן להציג את (a, b) כצירוף לינארי של a, b , ולכן גם כל כפולה שלו.

ג. בעזרת הסעיפים הקודמים אנו למעשה נדרשים להוכיח $(a, bc) | (a, b) (a, c)$. קיימים s, t, u, v כך שמתקיים

$$(a, b) = sa + tb$$

$$(a, c) = ua + vc$$

נכפול את שתי המשוואות האלו ונקבל

$$(a, b) (a, c) = (sa + tb) (ua + vc) = n_1 a + n_2 bc$$

עבור $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. לפי הגדרה $(a, bc) | a, bc$ ולכן (a, bc) מחלק כל צירוף לינארי של a ושל bc , בפרט את $n_1 a + n_2 bc$.

שאלה 5. הוכיחו כי לכל $a, n, m \in \mathbb{Z}$ מתקיים $(an, am) = |a|(n, m)$. פתרו. נסמן $d = (n, m)$. בשורה אחת, שאינה הוכחה מלאה,

$$(an, am) = |a|d \Leftrightarrow \left(\frac{an}{d}, \frac{am}{d}\right) = |a| \Leftrightarrow |a| \left(\frac{n}{d}, \frac{m}{d}\right) = |a| \Leftrightarrow \left(\frac{n}{d}, \frac{m}{d}\right) = 1 \Leftrightarrow (n, m) = d$$

דרך אחרת, היא דו-כיוונית (ומפורטת יותר). מצד אחד, ישנם מספרים u, v כך שמתקיים $(an, am) = uan + vam$. ידוע כי d מחלק כל צירוף לינארי של n ו- m , ובפרט את $uan + vam$. לכן $|a|d$ מחלק את $uan + vam$, ולכן $(an, am) | |a|d$. מצד שני, ישנם מספרים s, t כך שמתקיים $d = sn + tm$. נכפיל ב- $|a|$ ונקבל $|a|d = |a|sn + |a|tm$. ידוע כי (an, am) מחלק כל צירוף לינארי של an ו- am , ובפרט את $|a|sn + |a|tm$. לכן $(an, am) | |a|d$. לסיכום קיבלנו $(an, am) = |a|d$, כדרוש. ניתן להוכיח את הטענה גם בעזרת שימוש בהצגה של ממ"מ כמכפלת חזקות ראשוניים. במקרה זה מוכיחים כי $\min(n + a, m + a) = \min(n, m) + a$, שהיא אנלוגית להוכחת $(an, am) = |a|(n, m)$.

שאלה 6. מצאו בעזרת אלגוריתם אוקלידס את הממ"מ הבאים:

א. $(88, 218)$

ב. $(-26400, 65400)$, רמז: העזרו בשאלה הקודמת.

פתרו.

א. נשתמש באלגוריתם אוקלידס:

$$(88, 218) = (218, 88) = [218 = 2 \cdot 88 + 42]$$

$$(88, 42) = [88 = 2 \cdot 42 + 4]$$

$$(42, 4) = [42 = 10 \cdot 4 + 2]$$

$$(4, 2) = [4 = 2 \cdot 2 + 0]$$

$$(2, 0) = 2$$

ולכן $(88, 218) = 2$.

ב. נשים לב כי $-26400 = -300 \cdot 88$ וכן $65400 = 300 \cdot 218$. לכן לפי השאלה הקודמת

$$(-26400, 65400) = (26400, 65400) = |300| \cdot (88, 218) = 600$$

שאלה 7. יהיו n, m מספרים שלמים. הכפולה המשותפת המזערית (כמ"מ, least common multiple) שלהם מוגדרת להיות

$$\text{lcm}(n, m) = [n, m] = \min \{d \in \mathbb{N} : n|d \wedge m|d\}$$

למשל $[6, 10] = 30$ ו- $[2, 5] = 10$. הוכיחו:

א. אם $m|a$ וגם $n|a$, אז $[n, m] | a$.

ב. $[n, m] (n, m) = |nm|$. למשל $[6, 4] (6, 4) = 12 \cdot 2 = 24 = 6 \cdot 4$.

פתרון.

א. יהיו q, r כך ש- $a = q[n, m] + r$ כאשר $0 \leq r < [n, m]$. מהנתון כי $n, m|a$ ולפי הגדרה $[n, m] | n, m$ נובע כי $n, m|r$. אם $r \neq 0$ אז סתירה למינימליות של $[n, m]$. לכן $a = q[n, m]$, כלומר $[n, m] | a$.

ב. נראה דרך קלה לחישוב הממ"מ והכמ"מ בעזרת הפירוק של מספר למכפלת גורמים ראשוניים. נניח כי הפירוק הוא

$$|n| = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\beta_i} = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} p_3^{\beta_3} \dots \quad |m| = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\alpha_i} = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \dots$$

כאשר $\alpha_i, \beta_i \geq 0$ (והם כמעט תמיד אפס כי המכפלה סופית). כעת צריך להשתכנע כי

$$(n, m) = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)} \quad [n, m] = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)}$$

ומפני שלכל שני מספרים α, β מתקיים $\alpha + \beta = \min(\alpha, \beta) + \max(\alpha, \beta)$, אז $[n, m] (n, m) = |nm|$.

שאלה 8. אלגוריתם אוקלידס עובד גם עם פרמטרים. הוכיחו:

א. לכל n שלם מתקיים $(4n + 3, 7n + 5) = 1$.

ב. מצאו $s, t \in \mathbb{Z}$ (התלויים ב- n) כך ש- $(4n + 3)s + (7n + 5)t = 1$.

פתרון.

א. נשתמש כמה פעמים שאם $n = qm + r$, אז $(n, m) = (m, r)$.

$$(7n + 5, 4n + 3) = [7n + 5 = 2 \cdot (4n + 3) + (-n - 1)]$$

$$(4n + 3, -n - 1) = [4n + 3 = -4 \cdot (-n - 1) - 1]$$

$$(-n - 1, -1) = 1$$

אפשר לעשות את החישוב בכמה דרכים, למשל כאשר נמנעים ממקדמים שליליים ל- n :

$$(7n + 5, 4n + 3) = [7n + 5 = 1 \cdot (4n + 3) + (3n + 2)]$$

$$(4n + 3, 3n + 2) = [4n + 3 = 1 \cdot (3n + 2) + (n + 1)]$$

$$(3n + 2, n + 1) = [3n + 2 = 3 \cdot (n + 1) - 1]$$

$$(n + 1, -1) = 1$$

ב. משתמשים בשלבים של אלגוריתם אוקלידס המורחב, לפי הסעיף הקודם:

$$\begin{aligned} -n - 1 &= 1 \cdot (7n + 5) - 2 \cdot (4n + 3) \Rightarrow \\ -1 &= 1 \cdot (4n + 3) + 4 \cdot (-n - 1) \\ &= 4 \cdot (7n + 5) - 7 \cdot (4n + 3) \end{aligned}$$

ולכן נקבל $s = 7, t = -4$, שאינם תלויים ב- n !

שאלה 9. מצאו את כל המספרים השלמים n כך ש- $(n^2 + 11) | (n + 1)$. פתרון. נשים לב כי $n + 1$ מחלק את עצמו, ואם הוא מחלק את $n^2 + 11$, הוא גם יחלק את הממ"מ שלהם (ולכן גם יחלק כל צירוף לינארי של $n + 1$ ושל $n^2 + 11$). בעזרת החישוב

$$n^2 + 11 = (n - 1) \cdot (n + 1) + 12$$

ושימוש בטענה שאם $n = qm + r$, אז $(n, m) = (m, r)$, נקבל

$$(n^2 + 11, n + 1) = (n + 1, 12)$$

כלומר מספיק למצוא את המספרים n כך ש- $12 | (n + 1)$. המחלקים של 12 הם ידועים, ולכן המספרים המבוקשים הם $11, 5, 2, 1, 0, -2, -3, -4, -5, -7, -13$. החישוב שעשינו היה למעשה

$$\frac{n^2 + 11}{n + 1} = \frac{n^2 - 1 + 12}{n + 1} = \frac{(n + 1)(n - 1)}{n + 1} + \frac{12}{n + 1} = (n - 1) + \frac{12}{n + 1}$$

ומפני ש- $1 - n$ הוא שלם, נותר לבדוק מתי $\frac{12}{n+1}$ שלם.

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה שלחנו לנו פתרון שלהן.

שאלה 10. בחרו שפת תכנות (לא איזוטרית) כרצונכם וכתבו פונקציה בשם `xgcd` המממשת את אלגוריתם אוקלידס המורחב. כלומר כתבו פונקציה המקבלת כקלט שני מספרים שלמים a, b ומחזירה שלשה של מספרים (d, s, t) כך שמתקיים $d = (a, b) = sa + tb$. הוסיפו את התוצאות של הרצת

$$\text{xgcd}(5780, 2020) \quad \text{xgcd}(112233, 445566) \quad \text{xgcd}(81288218, -5134756)$$

הערה: בעוד ש- d הוא יחיד, המקדמים s, t הם לא בהכרח יחודיים. לדוגמה $\text{xgcd}(24, 44)$ תוכל להחזיר את השלשה $(4, 2, -1)$ כי $4 = 2 \cdot 24 - 1 \cdot 44$ אבל גם $(4, 13, -7)$ זו תוצאה מותרת, ולכן יתכנו מימושים נכונים שונים. דוגמאות נוספות

$$\text{xgcd}(-5, 0) \rightarrow (5, -1, 0) \quad \text{xgcd}(100, 11) \rightarrow (1, 1, -9)$$

פתרון. נזכר כי באלגוריתם אוקלידס הרגיל מתחילים עם זוג מספרים (a, b) כשמניחים כי $0 \leq b < a$. אם $b = 0$, אזי $(a, b) = a$. אחרת נכתוב $a = qb + r$ כאשר $0 \leq r < b$ ונמשיך בשלב הבא עם חישוב $(a, b) = (b, r)$. בכל שלב באלגוריתם קיבלנו כי ניתן להציג את השארית r כצירוף לינארי $r = a - qb$.

באלגוריתם אוקלידס המורחב אנו שומרים בשלב מספר i את המקדמים s_i, t_i והשארית r_i כך שמתקיים $r_i = s_i a + t_i b$, שבעזרתם נביע לבסוף את d כצירוף לינארי. נניח ובשלב קודם באלגוריתם קיבלנו כי

$$r_{\text{prev}} = s_{\text{prev}} a + t_{\text{prev}} b$$

ובשלב הנוכחי $r = sa + tb$ נרצה לדעת מי יהיו המקדמים $s_{\text{new}}, t_{\text{new}}$ לשלב הבא. נבצע חלוקה אוקלידית של השאריות מהשלב הקודם והשלב הנוכחי $r_{\text{prev}} = qr + r_{\text{new}}$. כעת נשתמש במשוואות לעיל ונקבל

$$r_{\text{new}} = r_{\text{prev}} - qr = (s_{\text{prev}}a + t_{\text{prev}}b) - q(sa + tb) = (s_{\text{prev}} - qs)a + (t_{\text{prev}} - qt)b$$

לכן

$$s_{\text{new}} = s_{\text{prev}} - qs \qquad t_{\text{new}} = t_{\text{prev}} - qt$$

האלגוריתם מתחיל בשלב שבו $r_0 = a, r_1 = b$ כלומר

$$r_0 = a = s_0a + t_0b \qquad r_1 = b = s_1a + t_1b$$

$$.s_0 = 1, t_0 = 0, s_1 = 0, t_1 = 1 \text{ ולכן}$$

נציג פתרון איטרטיבי בפית'ון, ולאחריו נוסיף הערות על המימוש.

```

1 def xgcd(a, b):
2     """
3     Extended Euclidean algorithm
4
5     Returns (d, s, t) where `d` is the greatest common
6     divisor of the integers `a` and `b`, where the
7     numbers `s` and `t` are such that `d = sa+tb`.
8     """
9     prev_r, r = a, b
10    prev_s, s = 1, 0
11    prev_t, t = 0, 1
12    while r:
13        q = prev_r // r
14        prev_s, s = s, prev_s - q*s
15        prev_t, t = t, prev_t - q*t
16        prev_r, r = r, prev_r - q*r
17
18    if prev_r < 0:
19        return (-prev_r, -prev_s, -prev_t)
20    else:
21        return (prev_r, prev_s, prev_t)

```

שורות 8–2 נועדו לתיעוד הפונקציה. בשורה 9, וגם בהמשך הקוד, מופיע שימוש בהשמה מקבילית (בפית'ון המינוח הוא tuple packing and sequence unpacking) ובו בריזומנית מציבים ערכים בשני משתנים. הערכים באגף ימין בהשמה מקבילית מחושבים לפני ההשמה באגף שמאל.

בשורה 13 מופיע שימוש ב"חלוקת רצפה", המחזירה את המנה השלמה של שני מספרים. בשפות תכנות רבות זו החלוקה הרגילה.

הלולאה שמתחילה בשורה 12 מבטיחה רק כי $0 \leq |r|$, ולא בהכרח $0 \leq r$. האלגוריתם עדין יעצר שכן $|r_i|$ קטן. במקרה וקיבלנו $a < b$, האיטרציה הראשונה בלולאה תהפוך את הסדר שלהם (עד כדי שינוי בסימן, שאינו משפיע על הממ"מ).

הבדיקה בשורה 18 מוודאת כי הממ"מ המתקבל הוא לא שלילי. פתרון רקורסיבי לבעיה בפית'ון:

```

1 def rxgcd(a,b):
2     "Recursive version of xgcd."

```

```

3     if b == 0:
4         if a < 0:
5             return (-a, -1, 0)
6         else:
7             return (a, 1, 0)
8     else:
9         q, r = divmod(a, b)
10        d, s, t = rxgcd(b, r)
11        return (d, t, s - q*t)

```

הפונקציה `divmod` בשורה 9 היא פונקציה סטנדרטית המחזירה שני מספרים q, r שהם המנה והשארית בחלוקה a/b כך שמתקיים $a = qb + r$. בשורה 10 נקבל $d = sb + tr$, ולכן בשורה 11 מחזירים לאחר הצבה

$$d = sb + tr = sb + t(a - qb) = ta + (s - qt)b$$

תוצאות אפשריות לחישובים שנתבקשו בשאלה הן

$$\begin{aligned} \text{xgcd}(5780, 2020) &= (20, 36, -103) \\ \text{xgcd}(112233, 445566) &= (33, -4633, 1167) \\ \text{xgcd}(81288218, -5134756) &= (2266, -71, -1124) \end{aligned}$$

שאלה 11. יהיו $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ פולינומים עם מקדמים ממשיים. נאמר כי $P(x)$ מחלק את $Q(x)$ אם קיים פולינום $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ כך ש- $Q(x) = f(x) \cdot P(x)$, ונסמן $P(x)|Q(x)$. נסחו והוכיחו גרסאות של משפט החילוק ואלגוריתם אוקלידס עבור פולינומים עם מקדמים ממשיים. ממשו פונקציית `xgcd` לפיהם. מה יקרה אם נחליף את $\mathbb{R}[x]$ ב- $\mathbb{Z}[x]$?

בהצלחה!