

שיעורי בית 5

1. נתון $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ הומומורפיזם בין חבורות. אברי היחידה הם בהתאמה: e_1, e_2 . הוכיחו:

(א) $\phi(e_1) = e_2$ [רמז: חשב $\phi(e_1 e_1)$]
פתרון: מצד אחד $\phi(e_1 e_1) = \phi(e_1)$ ומצד שני

$$\phi(e_1 e_1) = \phi(e_1) \phi(e_1)$$

כיוון ש $\phi(e_2) \in G_2$ יש לו הופכי. לכן אם נכפיל את השיוון

$$\phi(e_1) \phi(e_1) = \phi(e_1)$$

בהופכי זה נקבל

$$\phi(e_1) = e_2$$

(ב) $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$ לכל $g \in G_1$.
פתרון: נחשב

$$e_2 = \phi(e_1) = \phi(g g^{-1}) = \phi(g) \phi(g^{-1})$$

ולכן $\phi(g), \phi(g^{-1})$ הופכיים זה לזה.

(ג) שהגרעין המוגדר $\ker(\phi) = \{x \in G_1 \mid \phi(x) = e_2\}$ הוא תת-חבורה של G_1 .
פתרון: בסעיף קודם ראינו כי $e_1 \in \ker(\phi)$. נראה סגירות. $g, h \in \ker(\phi)$.
אזי

$$\phi(gh^{-1}) = \phi(g) \phi(h^{-1}) = \phi(g) \phi(h)^{-1} = e_2 e_2^{-1} = e_2$$

ולכן $gh^{-1} \in \ker(\phi)$

(ד) שהתמונה $Im(\phi) = \{\phi(x) \mid x \in G_1\}$ היא תת-חבורה של G_2 .
פתרון: $e_2 = \phi(e_1) \in Im(\phi)$. נראה סגירות. יהיו $\phi(g), \phi(h) \in Im(\phi)$ כאשר $g, h \in G_1$ אזי

$$\phi(g) \phi(h)^{-1} = \phi(g) \phi(h^{-1}) = \phi(gh^{-1}) \in Im(\phi)$$

כי $gh^{-1} \in G_1$

2. הגדרה: ההומומורפיזם $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ המוגדר $\phi(g) = e_2$ לכל $g \in G_1$ נקרא ההומומורפיזם הטריוואלי.

(א) מצא הומומורפיזם לא טריוואלי מהחבורה החיבורית \mathbb{Z}_3 לחבורת התמורות S_3 .
פתרון: כיוון ש $\langle 1 \rangle = \mathbb{Z}_3$ ציקלית ומתקיים $3 \cdot 1 = 0$ אזי מספיק להגדיר הומומורפיזם ע"י קביעה לאן שולחים את 1. נניח $1 \mapsto \sigma$ אזי צריכה לקיים $\sigma^3 = id$. לכן הומומורפיזם אפשרי אחד הוא

$$\phi(1) = (1, 2, 3)$$

ואז,

$$\phi(2) = \phi(1 + 1) = \phi(1)\phi(1) = (1, 2, 3)^2 = (1, 3, 2)$$

וגם

$$\phi(0) = id$$

(ב) הוכח שההומומורפיזם הטריאלי הוא ההומומורפיזם היחיד מ S_3 ל \mathbb{Z}_3 .
פתרון: הוכחה: יהא הומו ϕ אזי עבור $\sigma_1 = (1, 2), \sigma_2 = (2, 3)$ מתקיים:

$$0 = \phi(id) = \phi(\sigma_i^2) = 2\phi(\sigma_i)$$

אזי האיבר היחידה $a \in \mathbb{Z}_3$ המקיים $0 = 2a$ הוא $a = 0$ ולכן $\phi(\sigma_i) = 0$ ולכן

$$\phi((1, 2, 3)) = \phi(\sigma_1\sigma_2) = \phi(\sigma_1) + \phi(\sigma_2) = 0$$

כיוון ש $(1, 2, 3)$ ו $(1, 2)$ יוצרים של S_3 והם נשלחים לאפס אזי כל איבר ב S_3 ישלח ל-0 ולכן זהו ההומו הטריאלי.

3. תהא G חבורה. נגדיר $Aut(G)$ להיות קבוצת כל ההומומורפיזם $\phi : G \rightarrow G$ ההפיכים (כלומר חח"ע ועל)

(א) הוכח כי $Aut(G)$ חבורה ביחס לפעולת הרכבת פונקציות.
פתרון: הוכחה:

i. יהיו $\phi_1, \phi_2 \in Aut(G)$ אזי לכל $g, h \in G$ מתקיים כי

$$(\phi_1 \circ \phi_2)(gh) = \phi_1(\phi_2(gh)) = \phi_1(\phi_2(g)\phi_2(h)) = \phi_1(\phi_2(g))\phi_1(\phi_2(h)) = (\phi_1 \circ \phi_2)(g)(\phi_1 \circ \phi_2)(h)$$

ולכן

$$\phi_1 \circ \phi_2$$

הומו'. בנוסף הרכבה של פונקציות הפיכות היא פונקציה הפיכה $\phi_1 \circ \phi_2$ הומו' הפיך ולכן יש סגירות.

ii. קיבוציות יש בכל הרכבת פונקציות

iii. איבר היחידה הוא id שגם הוא הומו'

iv. איבר הופכי : יהי $\phi \in \text{Aut}(G)$ אזי נראה כי הפונקציה ההופכית ϕ^{-1} היא גם הומ' הוכחה

$$(\phi^{-1})(gh) = (\phi^{-1})(g) (\phi^{-1})(h)$$

אמ"מ (ע"י הרכבה של ϕ משני הצדדים)

$$gh = \phi [(\phi^{-1})(g) (\phi^{-1})(h)]$$

שאכן מתקיים כי

$$\phi [(\phi^{-1})(g) (\phi^{-1})(h)] = \phi [(\phi^{-1})(g)] \phi [(\phi^{-1})(h)] = gh$$

(ב) נגדיר הומומורפיזם של חבורות

$$\Phi : G \rightarrow \text{Aut}(G)$$

ע"י $\Phi(x) = I_x$ כאשר I_x מוגדר להיות פונקציה ההצמדה. כלומר $I_x(g) = xgx^{-1}$.

הוכיחו כי Φ הומומורפיזם (אין צורך להוכיח כי $I_x \in \text{Aut}(G)$) ומצאו $\ker(\Phi)$ הוכחה:

i. יהיו $x, y \in G$ אזי צריך להוכיח כי

$$\Phi(xy) = \Phi(x) \circ \Phi(y)$$

כלומר שמתקיים כי הפונקציות

$$I_{xy} = I_x \circ I_y$$

שוות. יהא $g \in G$ צריך להוכיח כי

$$I_{xy}(g) = (I_x \circ I_y)(g)$$

ואכן

ii. נמצא את הגרעין

$$\text{Ker}(\Phi) = \{x \in G : I_x = \text{id}\} = \{x \in G : \forall g \ xgx^{-1} = g\} = \{x \in G : \forall g \ xg = gx\} = Z(G)$$

כלומר זה המרכז (Center) של החבורה.

4. כל החבורות בתרגיל זה מוגדרות עם פעולת כפל (וחבורת התמורות עם הרכבה).

(א) נביט בהעתקה $\phi : (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \{-1, 1\}$ המוגדרת על ידי $\phi(x) = \frac{x}{|x|}$

(לדוגמה: $\phi(3) = 1$, $\phi(-3) = -1$). $\text{sign}(x)$ הוכח ש ϕ המומומורפיזם ומצא את הגרעין

פתרון : הוכחה:

i. יהיו $x, y \in G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ אזי צריך להוכיח כי

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$$

ואכן

$$\phi(xy) = \frac{xy}{|xy|} = \frac{xy}{|x||y|} = \frac{x}{|x|} \frac{y}{|y|} = \phi(x)\phi(y)$$

ii. נמצא את הגרעין

$$\text{Ker}(\phi) = \{x \in G : \text{sign}(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

(ב) : $\phi : (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ המוגדרת על ידי $\phi(a + ib) = a^2 + b^2$ (לדוגמה: $\phi(1 + 2i) = 5$), הוכח שהיא הומומורפיזם ומצא את הגרעין

. איזה צורה גיאומטרית יש לגרעין?

פתרון : נשים לב ש $\phi(z) = |z|^2$ כאשר $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. נמשיך להוכיח:

i. יהיו $z_1, z_2 \in G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ אזי צריך להוכיח כי

$$\phi(z_1 z_2) = \phi(z_1)\phi(z_2)$$

ואכן

$$\phi(z_1 z_2) = |z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2 = \phi(z_1)\phi(z_2)$$

ii. נמצא את הגרעין

$$\text{Ker}(\phi) = \{z \in G : |z| = 1\} = \{e^{i\theta} | \theta \in \mathbb{R}\}$$

כלומר מעגל היחידה.

(ג) ההומומורפיזם $\phi : S_n \rightarrow \{-1, 1\}$ המוגדרת על ידי $\phi(\sigma) = \text{sign}(\sigma)$. מצא את

הגרעין של ϕ

פתרון : נמצא את הגרעין

$$\text{Ker}(\phi) = \{\sigma \in G : \text{sign}(\sigma) = 1\} = A_n$$

5. תהא G חבורה סופית. נסמן ב \sim את יחס הצמידות.

(א) יהא $x \in G$, ונסמן $H = C(x) = \{g \in G : gx = xg\}$ המרכז של x . נגדיר יחס שקילות נוסף על G :

$$g_1 \equiv g_2 \iff g_1^{-1}g_2 \in H$$

הוכח כי גודל קבוצת המנה שווה לגודל מחלקת הצמידות של x . כלומר

$$|G/\equiv| = |[x]_{\sim}|$$

הדרכה: הראו שניתן להגדיר פונקציה

$$f : G/\equiv \rightarrow [x]_{\sim}$$

ע"י

$$\forall [g]_{\equiv} \in G/\equiv : f([g]_{\equiv}) = gxg^{-1}$$

ושפונקציה זאת חח"ע ועל. ופתרון: מוגדרות f . נניח $[g_1]_{\equiv} = [g_2]_{\equiv}$ צ"ל כי $f([g_1]_{\equiv}) = f([g_2]_{\equiv})$ כלומר $f([g_1]_{\equiv}) = f([g_2]_{\equiv})$ כי $g_1xg_1^{-1} = g_2xg_2^{-1}$ מהנתון נקבל כי $g_1xg_1^{-1} = g_2xg_2^{-1}$ כלומר $g_1 \equiv g_2 \iff g_1^{-1}g_2 \in H$ כי $g_1^{-1}g_2x = xg_1^{-1}g_2$ ואז $g_1^{-1}g_2x = xg_1^{-1}g_2$ כי

$$g_1xg_1^{-1} = g_1(xg_1^{-1}g_2)g_2^{-1} = g_1(g_1^{-1}g_2x)g_2^{-1} = g_2xg_2^{-1}$$

בנוסף ברור כי $gxg^{-1} \in [x]_{\sim}$ לפי הגדרת מחלקת שקילות. טענה f חח"ע. הוכחה נניח $f([g_1]_{\equiv}) = f([g_2]_{\equiv})$ צ"ל $[g_1]_{\equiv} = [g_2]_{\equiv}$. מהנתון נסיק כי $g_1xg_1^{-1} = g_2xg_2^{-1}$. ע"י הכפלה ב g_1^{-1} משמאל ו g_2 מימין נקבל כי $xg_1^{-1}g_2 = g_1^{-1}g_2x$ כלומר $g_1^{-1}g_2 \in H$ שזה גורר $g_1 \equiv g_2$ שזה שקול ל $[g_1]_{\equiv} = [g_2]_{\equiv}$.

טענה: f על. הוכחה: יהא $y \in [x]_{\sim}$ צריך למצוא לו מקור. מהגדרת מחלקת שקילות $y = gxg^{-1}$ עבור $g \in G$ כלשהוא. אזי מתקיים $f([g]_{\equiv}) = gxg^{-1} = y$ וסיימנו.

(ב) השתמשו בסעיף הקודם להסיק כי גודל מחלקת צמידות מחלק את גודל החבורה. כלומר לכל $x \in G$ מתקיים

$$|G| = k |[x]_{\sim}|$$

עבור k שלם כלשהוא.

פתרון: לפי משפט לגרנז' וסעיף קודם נקבל כי

$$\frac{|G|}{|H|} = |G/\equiv| = |[x]_{\sim}|$$

ואז

$$|G| = |H| \cdot |[x]_{\sim}|$$

וסיימנו.

6. תהא G חבורה עם p^n איברים (p מספר ראשוני, n מספר טבעי) הוכיחו כי במרכז של G קיים יותר מאיבר אחד (כמובן שהאיבר הנטרלי תמיד שייך למרכז..). כלומר

$$|Z(G)| > 1$$

הדרכה: השתמשו בכך ש

(א) היא איחוד זר של מחלקות צמידות. (ומה גודל מחלקת שקילות של איבר במרכז?)

(ב) בשאלה הקודמת

(ג) בחבורה \mathbb{Z}_p (שקילות מספרים שלמים מודולו p)
פתרון: לפי תכונה של יחס שקילות, G היא איחוד זר של מחלקות השקילות שלה. כלומר

$$G = \bigcup_{x \in G} [x]_{\sim}$$

ואם נבטל "כפילויות" נקבל איחוד זר. כלומר

$$G = \bigsqcup_{A \in G/\sim} A$$

ולכן

$$|G| = \sum_{A \in G/\sim} |A|$$

במילים: הגודל של G שווה לסכום גודלי מחלקות השקילות (הזרות).
 כעת לכל $x \in Z(G)$ מתקיים כי $[x]_{\sim} = \{x\}$

$$|G| = \sum_{A \in G/\sim} |A| = \sum_{|A|=1} |A| + \sum_{|A|>1} |A| = |Z(G)| + \sum_{|A|>1} |A|$$

כעת, כל מחלקת צמידות A מקיימת כי $|A| = p^k$ עבור $0 \leq k \leq n$ (לפי סעיף קודם, גודל מחלקת צמידות מחלקת את גודל החבורה).
 בנוסף לכל מחלקת צמידות A עם יותר מאיבר אחד מתקיים כי $|A| = p^k$ עבור $1 \leq k \leq n$ ולכן מודולו p מתקיים כי $|A| \equiv 0 \pmod{p}$ ולכן

$$|Z(G)| = |G| - \sum_{|A|>1} |A| = p^n - \sum_{k=1}^n \alpha_k p^k$$

כאשר α_k זה מספר מחלקות הצמידות מגודל p^k . ולכן מודולו p נקבל כי

$$|Z(G)| \equiv 0 \pmod{p}$$

ולכן $|Z(G)| = p^l$ עבור $l > 0$ או $|Z(G)| = 0$. כיוון ש $|Z(G)| > 0$ כי איבר היחידה שייך למרכז, נקבל כי גודל המרכז הוא $|Z(G)| = p^l$ עבור $l > 0$. כלומר במרכז יש לפחות p איברים.

.7

(א) תהא G חבורה. H תת חבורה. הוכח כי מספר הקוסטים השמאליים שווה למספר הקוסטים הימניים.
 כלומר הקבוצות $K_1 = \{gH \mid g \in G\}$ $K_2 = \{Hg \mid g \in G\}$ בעלות עוצמה שווה.
 (הדרכה: הגדר $\phi : K_1 \rightarrow K_2$ ע"י $\phi(gH) = Hg^{-1}$. הוכח כי ϕ מוגדרת היטב, חח"ע ועל)
פתרון: טענה ϕ מוגדרת היטב

הוכחה: נניח $g_1H = g_2H$ צ"ל כי $\phi(g_1H) = \phi(g_2H)$ וכן $Hg_1^{-1} = Hg_2^{-1}$.
אם $g_1H = g_2H$ אז $g_2^{-1}g_1 \in H$ כיוון ש H תת חבורה אז גם ההופכי
 $(g_2^{-1}g_1)^{-1} = g_1^{-1}g_2 \in H$ ואז $Hg_1^{-1} = Hg_2^{-1}$.
חח"ע: נניח $\phi(g_1H) = \phi(g_2H)$ צ"ל $g_1H = g_2H$
מהנחה $Hg_1^{-1} = Hg_2^{-1}$ כלומר $g_1^{-1}g_2 \in H$ כמו מקודם, H תת חבורה ולכן
גם ההופכי $g_2^{-1}g_1 \in H$ ואז $g_1H = g_2H$
על: יהא $Hg \in K_2$ המקור שלו יהיה $g^{-1}H \in K_1$
(ב) תהא G חבורה. H ת"ח. הוכח כי אם הסדר של G/H הוא 2 אז מתקיים כי

$$\forall g \in G : gH = Hg$$

פתרון: יהא $g \in G$ צ"ל $gH = Hg$. אם $g \in H$ אזי $gH = H = Hg$
אחרת $g \notin H$ ואז $gH \neq H$ (כי יש רק 2 אברים בקבוצת המנה). מתרגיל
קודם נסיק כי גם מספר הקוסטים הימניים הוא 2. כיוון ש Hg קוסט ימני שונה
מ H נקבל כי $gH = G \setminus H = Hg$