

בס"ד

אוניברסיטת בר-אילן  
מבחן בקורס: אלגברה מופשטת 1 (סמסטר קיץ)  
מספרי הקורס: 88211  
המרצה: מיכאל מגרל  
המתרגלים: לואי פולב ודורון פרלמן  
מועד ב'  
חומר עזר: רק מחשבון רגיל  
משך המבחן: שעתיים וחצי

יש לפתור בדיוק 4 מתוך 5 שאלות (כל שאלה שווה 25 נקודות)  
בנוסף יש גם שאלת בונוס השווה 5 נקודות.

## השאלות:

1. א. הוכיחו שכל חבורה  $G$  עם  $|G| = p^n$  איברים ( $p$  ראשוני) תמיד פתירה.  
ב. תהא  $G$  חבורה מסדר  $p^2q$  עבור  $p, q$  ראשוניים. הוכיחו ש- $G$  לא פשוטה.  
ג. הוכיחו ש  $G/H$  אבלית אם  $G' \subseteq H$ .
2. א. הוכיחו את משפט Lagrange.  
ב. הוכיחו שאם  $f: X \rightarrow Y$  אפימורפיזם של חבורות סופיות אזי  $|Y|$  מחלק את  $|X|$ .  
ג. הוכיחו שבחבורה  $A_4$  לא קיימת ת"ח עם 6 איברים.
3. א. נניח  $G$  חבורה מסדר  $p^2$  כאשר  $p$  ראשוני. הוכיחו ש- $G$  אבלית ומתקיים  
 $|Aut(G)| > p^2 - 2p$ .  
ב. הוכיחו או הפריכו:  $T^*/T \cong T/\Omega_\infty$   
(כאשר  $T := \{z \in C \mid \|z\| = 1\}$  ו  $\Omega_\infty$  חבורה של כל שורשי יחידה).  
ג. עבור החבורה  $G := U_{10} \times_{35}$  תארו תמונות אפימורפיות ומצאו  $|Aut(G)|$ .
4. א. נתבונן ב- $S_6$  ובקבוצה הבאה:  $H = \{\sigma \in S_6 : \sigma(2) = 2, \sigma(4) = 4, \sigma(6) = 6\}$ .  
הוכיחו ש- $H$  היא תת-חבורה ושהיא איזומורפית ל- $S_3$ .  
ב. האם היא תת חבורה נורמלית?  
ג. הוכיחו שב- $N(H)$  יש שתי תת-חבורות  $K, L$  כך ששתייהן איזומורפיות ל- $S_3$  ו-  
 $L \cap K = \{id\}$ .

5. א. הוכיחו את משפט Burnside.  
 ב. מצאו את מספר הלוחות  $4 \times 4$  הלא שקולים עד כדי סיבובים אם מותר לצבוע ב-3 צבעים קבועים.  
 ג. הוכיחו שכל פעולה  $G \times X \rightarrow X$  עם מסלול אחד איזומורפית לפעולה מהטיפוס  $G \times G/H \rightarrow G/H, (g, tH) \mapsto (gt)H$ .

**שאלת הבונוס: (5 נקודות)**

- נניח  $S_p$  חבורה סימטרית כאשר  $p$  ראשוני.  
 א. מצאו כמה ת"ח מסדר  $p$  קיימות ב- $S_p$ .  
 ב. באמצעות (א) הוכיחו  $p \mid (p-1)! + 1$  (משפט Wilson).

😊 **בהצלחה ושנה טובה !**