בוחן לינארית תשפ"ב - פתרון

3 באוגוסט 2022

1. יהי $V=\mathbb{C}^3$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$.

א. קבעו לאילו ערכי a הקבוצה $S=\left\{\begin{pmatrix}1\\a\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\a+1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\a-1\end{pmatrix}\right\}$ ת"ל. (18 נק')

ב. עבור כל אחד מערכי a שמצאתם בסעיף א קבעו האם $\begin{pmatrix}2\\-1+i\\2\end{pmatrix}\in Span(S)$.

(12 נק')

פתרון:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & | & 2\\ a & 0 & 1 & | & -1+i\\ 0 & a+1 & a-1 & | & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-aR_1}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & | & 2\\ 0 & -a & 1 & | & -1-2a+i\\ 0 & a+1 & a-1 & | & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3+R_2}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & | & 2\\ 0 & -a & 1 & | & -1-2a+i\\ 0 & 1 & a & | & 1-2a+i\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2+aR_3}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & | & 2\\ 0 & 0 & 1+a^2 & | & (-1-a-2a^2)+i(a+1)\\ 0 & 1 & a & | & 1-2a+i\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\longleftrightarrow R_3}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & | & 0\\ 0 & 1 & a & | & 1-2a+i\\ 0 & 0 & 1+a^2 & | & (-1-a-2a^2)+i(a+1)\end{pmatrix}$$

עבור $a\neq\pm i$ אין משתנים חופשיים ולכן הפתרון היחיד למערכת ההומגנית הוא טריוויאלי. אזי הוקטורים בת"ל.

$a=i$: נציב במטריצה ונקבל $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & | & 0\\ 0 & 1 & i & | & 1-2i+i\\ 0 & 0 & 0 & | & (-1-i-2i^2)+i(i+1)\end{pmatrix}$.

יש משתנה חופשי ולכן הוקטורים ת"ל.

מתקיים $(-1-i-2i^2)+i(i+1)=-1-i+2+(-1)+i=0$.

אזי אין שורת סתירה ולכן $\begin{pmatrix}2\\-1+i\\2\end{pmatrix}\in Span(S)$.

$a=-i$: נציב במטריצה ונקבל $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & | & 0\\ 0 & 1 & -i & | & 1+2i+i\\ 0 & 0 & 0 & | & (-1+i-2(-i)^2)+i(-i+1)\end{pmatrix}$.

יש משתנה חופשי ולכן הוקטורים ת"ל.

מתקיים $(-1+i-2(-i)^2)+i(-i+1)=-1-i+2+1+i=2\neq 0$.

אזי יש שורת סתירה ולכן $\begin{pmatrix}2\\ -1+i\\ 2\end{pmatrix}\notin Span(S)$.

2. יהיו $a_1,...,a_n\in\mathbb{R}$ כך ש־ $a_1\neq 0$. נסמן $v=\begin{pmatrix}a_1\\ .\\ .\\ .\\ a_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times 1}$.

א. חשבו את הצורה המדורגת קנונית של vv^t. (14 נק')

ב. עבור $n=3$, פתרו את מערכת המשוואות $(vv^t)x=0$. (13 נק')

ג. עבור $n=3$, פתרו את מערכת המשוואות $(vv^t)x=v$. (13 נק')

(בטאו את הפתרונות, אם קיימים, באמצעות a_1,a_2,a_3).

פתרון:

א. לפי כפל דרך שורה־שורה: לכל $1\leq i\leq n$, $R_i(vv^t)=v_{i_1}v^t=a_iv^t$.

נדרג: לכל $2\leq i\leq n$ נבצע את פעולת השורה $R_i-\frac{a_i}{a_1}R_1$ ($a_1\neq 0$).

נקבל $a_iv^t-\frac{a_i}{a_1}a_1v^t=0$. כעת כל השורות מלבד הראשונה הן שורות אפסים. נבצע את הפעולה $\frac{1}{a_1}R_1$ ($a_1\neq 0$) ונקבל כי האיבר המוביל בשורה הראשונה הוא 1 ולכן המטריצה מדורגת קנונית. בסך הכל קיבלנו כי השורה הראשונה של הצורה המדורגת קנונית היא $\frac{1}{a_1}v^t$ ושאר השורות הן שורות אפסים.

ב. נכתוב באופן מפורש את הצורה המדורגת קנונית $\begin{pmatrix}1 & \frac{a_2}{a_1} & \frac{a_3}{a_1}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

נסמן $x_2=s,x_3=t$ ונקבל כי מרחב הפתרונות הוא:

$\{\begin{pmatrix}1-\frac{a_2}{a_1}s-\frac{a_3}{a_1}t\\ s\\ t\end{pmatrix}:s,t\in\mathbb{R}\}$.

ג. מספיק למצוא פתרון פרטי למערכת. מתקיים (כפל דרך עמודה־עמודה):

$(vv^t)\begin{pmatrix}\frac{1}{a_1}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\frac{1}{a_1}C_1(vv^t)=\frac{1}{a_1}vC_1(v^t)=\frac{1}{a_1}(a_1v)=v$ ולכן זהו הפתרון הפרטי המבוקש. אזי קבוצת הפתרונות למערכת היא:

$\{\begin{pmatrix}1-\frac{a_2}{a_1}s-\frac{a_3}{a_1}t\\ s\\ t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{a_1}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}:s,t\in\mathbb{R}\}$.

3. א. תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ משולשיות עליונות, הוכיחו כי AB משולשית עליונה. (14 נק')

ב. תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ משולשית עליונה והפיכה. הוכיחו כי A^{-1} משולשית עליונה. (13 נק')

ג. תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש־ A ו־ AB משולשיות עליונות.

הוכיחו/הפריכו: B משולשית עליונה. (13 נק')

פתרון:

א. A, B משולשיות עליונות ולכן לכל $1 \leq i, j \leq n$, אם $j < i$ אז $a_{ij} = 0, b_{ij} = 0$.

לכל $1 \leq i, j \leq n$ כך ש- $j < i$ מתקיים:

$$(AB)_{ij} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip}b_{pj} = \sum_{p=1}^{i-1} a_{ip}b_{pj} + \sum_{p=i}^{j} a_{ip}b_{pj}$$

לכל $1 \leq p \leq i-1$: $p < i$ ולכן $a_{ip} = 0$. אזי $\sum_{p=1}^{n} 0 \cdot b_{pj} = 0 = \sum_{p=1}^{n} a_{ip}b_{pj}$.

לכל $i \leq p \leq n$, $j < i \leq p$ ולכן $b_{pj} = 0$. אזי $\sum_{p=1}^{n} a_{ip} \cdot 0 = 0 = \sum_{p=1}^{n} a_{ip}b_{pj}$.

בסך הכל קיבלנו כי $(AB)_{ij} = 0$ ולכן AB משולשית עליונה.

ב. A הפיכה ולכן הצורה המדורגת קנונית שלה היא I. נעקוב אחרי אלגוריתם גאוס לדירוג מטריצה. כל האיברים במשולש התחתון של המטריצה מאופסים. נותר לאפס את כל האיברים במשולש העליון. כל צעד כזה מתבצע ע"י הוספת כפל בסקלר של שורה לשורה שנמצאת מעליה ולכן המטריצה האלמנטרית המתאימה לה היא משולשית עליונה. כעת נותר להפוך את כל איברי האלכסון ל- 1. כל צעד כזה מתבצע ע"י כפל שורה בסקלר ולכן המטריצה האלנטרית המתאימה לו היא אלכסונית, ובפרט, משולשית עליונה. אזי ניתן לדרג את A ל- I ע"י כפל משמאל במטריצות אלמנטריות משולשיות עליונות. נסמן מטריצות אלו ב- $E_1, ..., E_k$ (בהתאם לצעדי הדירוג) ונקבל כי $A^{-1} = E_k \cdots E_1$ ולכן היא מכפלה של מטריצות משולשיות עליונות. באינדוקציה על סעיף א נקבל כי $E_k \cdot \cdots E_1$ משולשית עליונה, כדרוש.

ג. לא נכון, הפרכה: $A = 0, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $A = AB = 0$ משולשיות עליונות אבל B לא משולשית עליונה.