

**מבוא לתורת החבורות (88211) – בחינת סיום (מועד א')**

**פרופ' סטוארט מרגוליס**

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).  
אין להשתמש בשום חומר עזר, כולל מחשבון.  
יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות. אם פתרתם את כל השאלות – נא לציין 4 שאלות לבדיקה,  
אחרת תיבדקנה 4 הראשונות. כל השאלות שוות-משקל.  
נא להסביר ולנמק בבירור את הפתרונות. ניתן לסמן עמודים לטייטל.

1. נתונה תמורה ב  $S_{10}$

$$\sigma = (14610)(285)(39)$$

- (א) רשמו את  $\sigma$  כטבלה.
- (ב) מצאו את הסדר של  $\sigma$ .
- (ג) מצאו את הסדר של  $\sigma^{14}$ .
- (ד) כתבו את  $\sigma^{-1}$  ואת  $\sigma^2$  כמכפלה מחזוריים זרים.

2. תהינה  $H, K \leq G$  שתי תתי חבורות של חבורה  $G$ .

(א) הוכיחו כי  $HK$  היא תת חבורה של  $G$  אם ורק אם  $HK = KH$ .

(ב) אם  $G$  סופית, הוכיחו כי  $|HK| = \frac{|H| |K|}{|H \cap K|}$ .

3. תהי  $G$  חבורה ו  $H$  תת חבורה נורמלית של  $G$ . הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם  $H$  ציקלית ו  $G/H$  ציקלית אז  $G$  ציקלית.

(ב) אם  $G$  ציקלית אז  $G/H$  ציקלית.

(ג) אם  $G$  אבלית אז  $G/H$  אבלית.

(ד) אם  $H$  אבלית ו  $G/H$  אבלית אז  $G$  אבלית.

4. נתונה  $G = S_3$  ונתונה שהיא פועלת על  $X = \{R, G, B\}$ . נתון עוד כי  $R = G$  \* (12)  
ו  $R = B$  \* (23). מצאו לפי אינפורמציה זו את הפעולה של כל איבר בקבוצה  $X$ . אפשר לתאר את הפעולה באמצעות טבלה כפל.

5. תהי  $G$  חבורה סופית ו  $N$  תת חבורה נורמלית של  $G$ .

(א) הוכיחו שאם  $g \in G, g \notin N$  ו  $o(g)$  הוא מספר ראשוני אז  $\langle g \rangle \cap N = \{1\}$ .

(ב) אם  $g \in G$  אז הסדר של  $gN \in G/N$  מחלק את הסדר של  $g$ .

(ג) אם  $g \in G$  ו  $\langle g \rangle \cap N = \{1\}$  אז  $o(gN) = o(g)$ .