

תרגיל 6

1. נניח כי $f, f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ הינן פונקציות מדידות בממ"ח (X, S, μ) . $f_n \rightarrow f$ כב"מ ו
כמעט בכל מקום. הוכיחו כי $\int_A f_n \rightarrow \int_A f < \infty$ עבור כל $A \in S$.

2. תהי f פונקציה מדידה לבג. הראו כי קיימת פונקציה מדידה בורל g כך ש $g = f$ כמעט בכל מקום.
הדרכה:

- א. קרבו את f בעזרת פונקציות פשוטות f_n .
- ב. הראו כי קיימות פונקציות פשוטות g_n המדידות בורל ומקיימות $f_n = g_n$ כב"מ בעזרת משפט האיפיון של קבוצות לבג.
- ג. הראו כי הגבול של g_n (תחת תיקון קל) הינה הפונקציה הנדרשת.

3. (משפט לוסין) תהי $f = 1_A$ פונקצית דריכלה בקטע $[0, 1]$, כלומר, $A = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$. הוכיחו כי לכל $\varepsilon > 0$ קיימת קבוצה סגורה F (מצאו את F ממש) בקטע $[0, 1]$ כך שהצמצום של f על F הינה פונקציה רציפה ומתקיים $m([0, 1] \setminus F) < \varepsilon$.