בס"ד

בוחן בקורס אלגברה ליניארית 1 (88-112)

אוניברסיטת בר אילן, כ"ג כסלו תשע"ה (15.12.14)

שם הנבחן: ______________

ת.ז: ______________

מתרגל: ______________

מרצה: פרופ' אנדריי רזניקוב.

מתרגלות: יפית נתני ועדי לוגסי.

משך הבוחן: שעה וחצי.

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.

יש לענות על כל השאלות הבאות:

1. יהי F שדה. הוכח: $A \in M_n(F)$ הפיכה אם ורק אם קיים $b \in F^n$ כך של $Ax = b$ קיים פיתרון יחיד.

2. א. יהי F שדה ויהיו $A \in F^{m \times n}$ ו $B \in F^{n \times k}$. הוכח: $(AB)^t = B^t A^t$.

   ב. הוכח שלכל מטריצה $A \in F^{m \times n}$, המטריצה AA^t סימטרית.

3. יהיו A, B, C מטריצות. הוכח: $A(BC) = (AB)C$.

<u>בהצלחה !</u>

בס״ד

פתרון למבחן באלגברה לינארית 1 למתמטיקאים

1. כיוון $\Leftarrow$: נתון ש-A הפיכה.

צ״ל שקיים $b\in F^n$ כך של-$Ax=b$ קיים פתרון יחיד.

הוכחה: לדוגמא ל-$b=0$ קיים פתרון יחיד שהוא 0, כי אם A הפיכה אז A^{-1} קיימת ולכן מ-$Ax=b$ מקבלים:

$$A^{-1}(Ax)=A^{-1}(b) \qquad \text{(מכפילים ב-}A^{-1}\text{ משמאל)}$$

$$\Downarrow$$

$$x=A^{-1}\cdot b=A^{-1}\cdot 0=0$$

$$\Downarrow$$

$x=0$ פתרון יחיד. מש״ל.

כיוון $\Rightarrow$: נתון שקיים $b\in F^n$ כך של-$Ax=b$ קיים פתרון יחיד.

צ״ל ש-A הפיכה.

הוכחה: אם קיים פתרון יחיד אז אין משתנים חופשיים ולכן אין שורות של אפסים כי המטריצה היא $n\times n$.

נסמן ב-$\tilde{A}$ את הצורה המדורגת של A, ו-E המטריצה המדרגת כך ש-$\tilde{A}=EA$. יהיו I^j, $1\le j\le n$ העמודות של מטריצת היחידה.

לכל מערכת $\tilde{A}x=I^j$ יש פתרונות ולכן לכל מערכת $Ax=I^j$ יש פתרונות. הפתרונות האלה הם $(A^{-1})^j$ שהם העמודות של המטריצה A^{-1}.

הוכחה כיוון $\Rightarrow$ בדרך אחרת:

אם קיים פתרון יחיד אז אין משתנים חופשיים ולכן אין שורות של אפסים כי המטריצה היא $n\times n$.

לפי אלגוריתם הדירוג, I היא הצורה מדורגת קנונית של A.

לכן קיימות מטריצות אלמנטריות $E_1,\dots,E_s$ כך ש:

$$E_s\cdots E_2\cdot E_1\cdot A=I$$

$$\Downarrow$$

$$A^{-1}=E_s\cdots E_1 .$$

---

2. א.

$$(ab)^t_{ij}=(ab)_{ji}=\sum_{p=1}^{n}a_{jp}b_{pi}=\sum_{p=1}^{n}(a^t)_{pj}(b^t)_{ip}=\sum_{p=1}^{n}(b^t)_{ip}(a^t)_{pj}=(b^ta^t)_{ij}$$

ב.

$$(AA^t)^t=(A^t)^t\cdot A^t=A\cdot A^t \Longrightarrow (A\cdot A^t)^t=A\cdot A^t$$

ולכן $A\cdot A^t$ סימטרית, לפי ההגדרה.

בס"ד

3. יהיו A,B,C מטריצות. צ"ל: $A(BC)=(AB)C$.

הוכחה:

נניח $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, $B\in\mathbb{F}^{n\times l}$, $C\in\mathbb{F}^{l\times h}$.

נמצא איבר כללי שנמצא במקום ה- ij בכל אחד מהאגפים ונראה שהם שווים.

<u>$A(BC)$</u>: נסמן $BC=D$.

$$(AD)_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}d_{kj} \quad , d_{kj}=\sum_{t=1}^{l} b_{kt}\cdot c_{tj}$$

$$\Rightarrow (AD)_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot\sum_{t=1}^{l} b_{kt}c_{tj}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{l} a_{ik}(b_{kt}\cdot c_{tj}).$$

<u>$(AB)C$</u>: נסמן $P=AB$.

$$(PC)_{ij}=\sum_{k=1}^{l} p_{ik}c_{kj} \quad , \quad p_{ik}=\sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{tk}$$

$$\Rightarrow (PC)_{ij}=\sum_{k=1}^{l}\left(\sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{tk}\right)c_{kj}=\sum_{k=1}^{l}\sum_{t=1}^{n}(a_{it}b_{tk})c_{kj}$$

בגלל שניתן להחליף שמות של אינדקסים והאיברים בשדה הם אסוציאטיביים רואים ששני האיברים הכלליים שווים.

מש"ל.