(1) 27.10.13
אנליזה פונ'
הרצאה 2

• נורמה היא פונ' מ $E$ ל $R_+$ : $\|\cdot\| \to E \to R_+$

נורמה צריכה לקיים:
1. $x=0 \iff \|x\|=0$ , $\|x\| \geq 0$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

• נורמה נובעת ממקרה פרטי של מטריקה (מרחק): $d: E \times E \to R_+$

מרחב מטרי צריך לקיים:
$$d(x,x)=0$$
$$d(x,y) = d(y,x) \geq 0$$
$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$$

אם $\|\cdot\|$ נורמה אז $d(x,y) := \|x-y\|$
(שאפשר להגדיר את המטריקה ($d(x)$) בתור הנורמה של $x-y$).

• סדרה $\{x_n\}$ מתכנסת ל $x$ שהוא איבר במרחב אם $\|x_n - x\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$
$\{x_n\} \in E \to x \in E$

דוגמאות: • $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ - מרחק אוקלידי רגיל

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \qquad x = (x_1, x_2)$$

$(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_2)$

$$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}$$

לנורמות השונות יש מקרים בהם הם כל פעם אחת מאחרת הבחירה הדבק הטבעית לתיאור

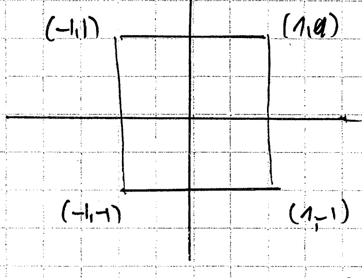
$\|x-y\|_1 = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$

• $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$ (שאפשר לחשוב על זה בתור המרחק מ0)

• $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$

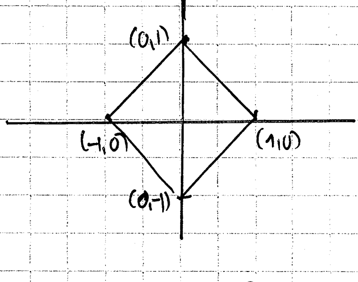
כדור היחידה! (הסגור) $\overline{B_1(0)} = \{x : \|x\| \leq 1\}$

[$B_r(x)$ - כדור ברדיוס $r$ סביב $x$]



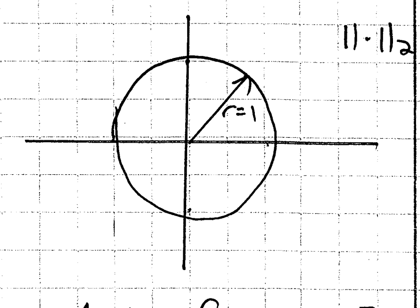

כל נק' שבה אחת מהקוא' שווה בדיוק 1, והשניה קטנה/שווה 1 יהיו על השפה.

$\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty$




כל נק' על השפה היא נק' שסכום קוא' $x$ ועוד קוא' $y$ שווה 1. $|x|+|y|=1$

$\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1$




היכן שהנורמה שווה בדיוק 1, נקודות ספירת היחידה. מה שבפנים נקרא כדור היחידה

כדור היחידה ב $\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2$

② 27.10.13

שאלה פתוחה: אם יכולים 2 מרחבים (הרצאה ב) נורמות שונות עם אותו כדור היחידה

**משפט:** כדור היחידה מאפיין את הנורמה

$$\|x\| = \frac{1}{\max\{\lambda : \lambda x \in \overline{B_1(0)}\}}$$

בגלל [illegible] את $\|x\|$ כך שהנורמה של [illegible] תהיה בדיוק 1.

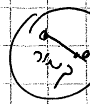
[**משפט:** כדור היחידה הוא תמיד גוף קמור (נובע מאי שוויון המשולש).]

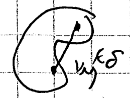
**הגדרה:** קבוצה $X$ במרחב הנורמי נקראת קמורה אם $\forall x,y\in X,\ \lambda\in[0,1]$

$$\lambda x+(1-\lambda)y\in X$$

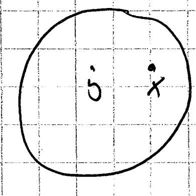
**משפט:** א. כדור היחידה במרחב נורמי הוא גוף קמור וסימטרי.

ב. כל גוף קמור עם פנים לא ריק $\underbrace{\text{}}_{}$ סימטרי הוא כדור יחידה של איזשהו מרחב נורמי.




**הוכחה א:** אם יש 2 נק' בתוך כדור, יודעים ש: $1\ge\|x\|,\ 1\ge\|y\|$.




$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\| \le \|\lambda x\|+\|(1-\lambda)y\| \le \lambda\|x\|+(1-\lambda)\|y\|\le 1$$

אי שוויון המשולש

$\left(\|x\|\le 1,\ \|y\|\le 1,\ \lambda+(1-\lambda)=1\right)$

**הגדרה:** שתי נורמות $\|\cdot\|$, $|||\cdot|||_*$ על מרחב $E$ נקראות שקולות אם קיימים $c_1,c_2>0$ כך ש

$$c_1\|x\|\le|||x|||_*\le c_2\|x\| \quad \forall x\in E$$

**טענה:** 2 נורמות הן שקולות אמ"מ הן מגדירות אותה התכנסות.
כלומר $\|\cdot\|$ שקולה ל $|||\cdot|||_*$ אמ"מ $\|x_n-x\|\to 0$ אמ"מ $|||x_n-x|||_*\to 0$.

**הוכחה:** נניח ש $\|\cdot\|$ שקולה ל $|||\cdot|||_*$, אז קיימים $c_1,c_2$ כך ש $c_1\|x\|\le|||\cdot|||_*\le c_2\|\cdot\|$

אז אם $\|x_n-x\|\to 0$ אז $0\le|||x_n-x|||_*\le c_2\|x_n-x\|\to 0$

נורמה חיובית

כי התחלנו ש $\|x_n-x\|$ שואף ל 0

וכנ"ל הפוך.

$$\left[\ 0\le|||x_n-x|||\le c_2\|\underbrace{x_n-x}_{x_n-x \text{ הוא איבר במרחב.}}\|\to 0\ \right]$$

כי נורמה תמיד חיובית

**כיוון שני:** נניח ש $\|\cdot\|$, $|||\cdot|||_*$ מגדירות אותה התכנסות. נראה שהן שקולות.

נניח בשלילה שהנורמות לא שקולות.
בלי הגבלת הכלליות, נניח שלא קיים $c_2>0$ כך שלכל $x$: $|||x|||_*\le c_2\|x\|$

כלומר לכל קבוע $c$ אפשר למצוא $x_c\in E$ כך ש $|||x_c|||_*>c\|x_c\|$

בפרט יש סדרה $x_n$ כך ש $|||x_n|||_*>n\|x_n\|$

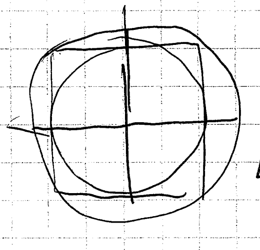
אם $y_n=\frac{x_n}{|||x_n|||_*}$ אז $|||y_n|||_*=1$ מהומוגניות

! $\|y_n\|\le\frac{|||y_n|||_*}{n}=\frac{1}{n}$ לכן $\|y_n\|\to 0$

③ 27.10.13
אנליזה פונק'
הרצאה 2

כלומר, קיבלנו ש- $\|y_n - 0\|_n$
$\to 1$ : $\|\|y_n - 0\|\|_n$

ולכן קיבלנו סתירה.



~~[illegible]~~

את אי השוויון מנורמה, אפשר לכתוב בצורה גרפית על השרטוטים.
כאשר הכדור היחידה יותר קטן הנורמה יותר גדולה

?

**משפט:** כל 2 נורמות על מרחב ממימד סופי הן שקולות

במרחב ממימד אינסופי זה לא נכון. $\ell^2, \ell^p, \ell^\infty$ לא שקולות

$$\ell^p = \{(\underbrace{x_1, x_2, x_3, \dots}_{\text{אינסוף}}) : \sum |x_i|^p < \infty\}$$

**טופולוגיה** קבוצות פתוחות, סגורות

כדור פתוח. $B_r(x_0) = \{y \in E : \|x_0 - x\| < r\}$ כדור פתוח ברדיוס r סביב $x_0$

כדור סגור $\overline{B_r(x_0)} = \{y \in E : \|x_0 - y\| \le r\}$ כדור סגור

הגדרה - קבוצה פתוחה: קבוצה $U \subset E$ קבוצה פתוחה אם לכל $x \in U$ קיים $\varepsilon > 0$ כך ש $B_\varepsilon(x) \subset U$.
כלומר לכל נק' בקבוצה יש כדור פתוח סביבה שמוכל בקבוצה

טענה - כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה

הוכחה: יהי $B_r(x_0)$ כדור פתוח, ותהי $x \in B_r(x_0)$ נקודה בכדור.

$\|x - x_0\| = r_x < r$. נקח $\varepsilon = r - r_x$. נראה ש $B_\varepsilon(x) \subset B_r(x_0)$

נבדוק להראות שלכל $y \in B_\varepsilon(x)$ מתקיים $y \in B_r(x_0)$, כלומר $\|y - x_0\| < r$.

לכל נק' בכדור שלא על השפה, אפשר למצוא כדור סביבו.

$y \in B_\varepsilon(x)$ ולכן $\|y - x\| < \underset{= r - r_x}{\varepsilon}$ :

$$\|y - x_0\| \le \|y - x\| + \|x - x_0\| < r - r_x + r_x = r$$

אש"מ

כדי להראות של
בכדור עם רדיוס r

(4) 27.10.13
אנליזה פונ'
הרצאה 2

## עוד דוגמאות:

איחוד של שני כדורים פתוחים הוא קבוצה פתוחה.

**משפט:**
1. איחוד (כלשהו) של קבוצות פתוחות הוא פתוח
2. חיתוך סופי של קבוצות פתוחות הוא פתוח

**הוכחה:** 1. יהיו $A_\alpha$ קבוצות פתוחות, $B=\bigcup_\alpha A_\alpha$. יהי $x\in\bigcup_\alpha A_\alpha$ אז קיים $\alpha$ כך ש $x\in A_\alpha$,

מכיוון ש $A_x$ פתוחה קיים $\varepsilon>0$ כך ש $B_\varepsilon(x)\subset A_x$ ולכן $B_\varepsilon(x)\subset\bigcup_\alpha A_\alpha$.

2. מספיק להראות לחיתוך של 2 קבוצות (ואז אינדוקציה)

$A_1\cap A_2$ יהי $x\in A_1\cap A_2$. צ"ל קיים $\varepsilon>0$ כך ש $B_\varepsilon(x)\subset A_1\cap A_2$

$x\in A_1\cap A_2 \Rightarrow x\in A_1$, $A_1$ פתוחה ולכן קיים $\varepsilon_1>0$ כך ש: $B_{\varepsilon_1}(x)\subset A_1$

בצורה דומה, $B_{\varepsilon_2}(x)\subset A_2$

$$B_{\varepsilon_1}(x)\cap B_{\varepsilon_2}(x) = B_{\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}(x)\subset A_1, A_2$$

**דוגמה:** $A=\{f\in C[0,1] : f(\frac{1}{2})<1\}$ פתוחה.

בנורמה sup: $\|f\|_{sup}=\sup_{x\in(0,1)}|f(x)|$

הערה

$$B_r(0)=\{f\in C[0,1] : \|f\|_\infty<r\}$$
$$=\{f\in C[0,1] : \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|<r\} = \{f\in C[0,1] : |f(x)|<r \ \ \forall x\in(0,1)\}$$

$$B_r(x_0)=x_0+B_r(0)$$

**הוכחה ש A פתוחה:** יהי $f\in A$. צריך למצוא $\varepsilon>0$ כך ש $f+B_\varepsilon(0)\subset A$

$f\in A$ ולכן $|f(\frac{1}{2})|<1$.

נקח $\varepsilon=1-|f(\frac{1}{2})|$

אם $g\in B_\varepsilon(0)$ אז $|g(x)|<\varepsilon$ לכל $x$ ובפרט $g(\frac{1}{2})<\varepsilon$

צ"ל ש $A$ פתוחה - כלומר לכל $f\in A$ יש $\varepsilon=\varepsilon_f$ כך ש $B_\varepsilon(f)\subset A$

הראינו ש $B_\varepsilon(f)=f+B_\varepsilon(0)$

$f\in A$ ולכן $|f(\frac{1}{2})|<1$. נבחר $\varepsilon=1-|f(\frac{1}{2})|$

אם $g\in B_\varepsilon(0)$ אז $|g(x)|<\varepsilon$ לכל $x\in[0,1]$ ובפרט $|g(\frac{1}{2})|<\varepsilon$,

לכן $|(f+g)(\frac{1}{2})|<1$, לכן $f+g\in A$, כלומר $f+B_\varepsilon(0)\subset A$

(5) 27.10.13

[illegible]
הרצאה 2

קבוצה $A$ היא פתוחה אם - $\forall x\in A\ \exists\varepsilon>0 : B_\varepsilon(x)\subset A$

<u>קבוצה סגורה</u> - היא קבוצה שהמשלים שלה פתוח, כלומר $B$ היא סגורה
אם"ם $B^c=E\setminus B$ פתוחה.

<u>טענה:</u> כדור סגור הוא סגור

<u>הוכחה:</u> יהי $\overline{B_r(x)}$ כדור סגור. צריך להראות ש $\overline{B_r(x)}^c$ קבוצה פתוחה.

תהי $y\in(\overline{B_r(x)})^c$ (כמו להגיד $y\notin\overline{B_r(x_0)}$).

אז $r<\|y-x\|$, ניקח $\varepsilon=\|y-x\|-r$

באותה דרך כמו קודם $B_\varepsilon(y)\subset\overline{B_r(x)}^c$

$x\notin A \iff x\in A^c$

$x\notin A \Leftarrow x\in B \iff B\cap A=\emptyset \iff B\subset A^c$

לכן צריך להראות שאם $z\in B_\varepsilon(y)$ אז $z\notin B_r(x)$

$\|z-x\|\ge\|x-y\|-\|y-z\|>r$

<u>טענה:</u> חיתוך כלשהו של קבוצות סגורות הוא סגור
איחוד סופי של קבוצות סגורות הוא סגור
} אפשר להוכיח ע"י חוקי דה מורגן

$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$
$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$
$(\bigcap_n A_n)^c=\bigcup_n A_n^c$

<u>דוגמאות:</u> 1. נקודה היא קבוצה סגורה (במרחב הנורמי)

2. הכל $E$, או כלום $\emptyset$ - גם סגורות וגם פתוחות

<u>תרגיל (תשובה):</u> סדרה $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ אמ"מ קיימת קבוצה פתוחה $U$, $x\in U$,
קיים $N$ כך ש $x_n\in U$ לכל $N<n$.

כלומר, $x_n\to x$ אם"ם לכל סביבה פתוחה של $x$ החל מרגע מסוים ($N<n$) כל איברי הסדרה מוכלים בסביבה הזו.

<u>טענה:</u> קבוצה $S$ היא סגורה אמ"מ לכל סדרה מתכנסת $x_n\to x$ אם $\{x_n\}\subset S$
אזי גם $x\in S$.

<u>הוכחה:</u> $\Leftarrow$ נניח $S$ סגורה, ותהי $S\subset\{x_n\}$, ! $x$ כך ש $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.
צ"ל $x\in S$.
נניח בשלילה ש $x\notin S$. $S$ סגורה, ולכן $S^c$ פתוחה, ולכן יש $\varepsilon>0$ כך
ש $B_\varepsilon(x)\subset S^c$. אבל $x_n\to x$, ולכן יש $N$ כך שלכל $N<n$ $B_\varepsilon(x)\ni x_n$
בסתירה לכך ש $x_n\in S$.

⑥ 27.10.13
שלומית פינק
הרצאה 6

⇐ צ"ל: S סגורה.
נראה ש-$S^c$ פתוחה, אחרת יש $x\in S^c$ כך שלכל n יש $y_n\in S$
כך ש-$\frac{1}{n} > \|y_n - x\|$.

שלכן אז $y_n \to x$ בסתירה לנתון (כי $y_n$ היא סדרה ב-S, ולא היא ב-S וזה
סותר, שכן $S^c$ פתוח, כלומר S סגור).

__הגדרה:__ הסגור של קבוצה הוא החיתוך של כל הקבוצות הסגורות שמכילות אותה.

__טענה:__ קיימת יחידה קבוצה סגורה שמכילה את A שמוכלת בכל קבוצה סגורה אחרת
שמכילה את A (מינימליות ביחס להכלה).

__טענה:__ הסגור של A הוא תמיד קבוצה סגורה. נסמן אותו $\bar{A}$ והוא הקבוצה המינימלית
מהטענה.

__הוכחה:__ $\{B : B \text{ סגור},\ A\subset B\}$ לא ריקה כי $E\in B$
משפחת קבוצות B שמכילות A

לכן ניתן להסתכל על $\bigcap_{\substack{B\supset A \\ B \text{ סגור}}} B$ וזו קבוצה סגורה לפי הטענה שהוכחנו קודם).

קל לראות ש-$A\subset\bar{A}$

קל לראות - אם $A\subset C$, C סגור אז $\bar{A} = \bigcap_{\substack{B\supset A \\ B \text{ סגור}}} B \subset C$ [סימון נוסף: $C_\ell\{A\}$]

דוג - $C_\ell\mathbb{Q} = \mathbb{R}$

__משפט וויירשטראס__ - הסגור של הפולינומים ב-$C[0,1]$ הוא כל $C[0,1]$.

__הגדרה:__ קבוצה D נקראת צפופה אם $\bar{D}=E$, זה שקול לתכונות הבאות:
1. לכל $x\in E$ לכל $\varepsilon>0$ יש $y\in D$, כך ש-$\varepsilon > \|y-x\|$
2. כל קבוצה פתוחה לא ריקה $U\subset E$ מכילה איבר ב-D
3. לכל $x\in E$ קיימת סדרה $\{x_n\}\subset D$ כך ש-$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\|} x$

__הגדרה:__ קבוצה K נקראת קומפקטית אם לכל סדרה $\{x_n\}\subset K$ יש תת סדרה
$x_{n_k}$ שמתכנסת לאיבר ב-K.

[קומפקטיות סדרתית - במרחב נורמי זה שקול להגדרה הכללית יותר של קומפקטיות]

נכונות - קבוצה קומפקטית היא חסומה וסגורה. ב-$\mathbb{R}^n$ - קבוצה היא קומפקטית אמ"מ
היא חסומה וסגורה.
לא
מוכיחים כדרך
מתוך ספר.