בוחן – לינארית למהנדסים, תשע"ד

<u>מתרגלים</u>: אחיה בר און וגילי גולן.
<u>משך הבוחן</u>: שעה וחצי.
<u>חומר עזר</u>: מחשבון.

יש לענות על כל השאלות.
בשאלות ההוכחה יש להקפיד על הוכחה מסודרת הכוללת את כל השלבים והמעברים.
טיעונים חלקיים או לא מוסברים לא יקבלו את מלוא הנקודות.
את התשובות יש לכתוב בטופס הבחינה .
שימו לב כי המחברת ממדור בחינות משמשת כטיוטה ולא תיבדק.

שאלה	ציון
1	
2	
3	
ציון סופי	

בהצלחה! ☺

1. ענו על הסעיפים הבאים:

1.1. (21 נק') נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 4\\ 2 & 1 & 0 & -1\\ -3 & -1 & -2 & -3\end{pmatrix}\in M_{3\times 4}(R)$.

מצאו בסיסים ומימדים למרחב העמודה, מרחב השורה ומרחב האפס שלה.

פתרון:

בסיס למרחב השורה: נדרג את המטריצה. הדירוג לא משפיע על מרחב השורה.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 4\\ 2 & 1 & 0 & -1\\ -3 & -1 & -2 & -3\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3+3R_1]{R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 4\\ 0 & 1 & -4 & -9\\ 0 & -1 & 4 & 9\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3+R_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 4\\ 0 & 1 & -4 & -9\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

לכן, $R(A)=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-4\\-9\end{pmatrix}\right\}$. מכיוון ש $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-4\\-9\end{pmatrix}\right\}$ בת"ל,

$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-4\\-9\end{pmatrix}\right\}$ בסיס למרחב השורה $R(A)$. בפרט, מימד מרחב השורה הוא 2.

בסיס למרחב העמודה: עמודות הצירים במטריצה המדורגת הן העמודה הראשונה והשנייה לכן העמודות המתאימות במטריצה המקורית מהוות בסיס למרחב העמודה. כלומר,

$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס למרחב עמודה. בפרט מימד מרחב העמודה: 2.

בסיס למרחב האפס: דירוג מטריצה לא משפיע על מרחב האפס שלה. נמצא את מרחב האפס של המטריצה המדורגת. כלומר, נמצא את מרחב הפתרונות למערכת ההומוגנית,

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 2 & 4 & 0\\ 0 & 1 & -4 & -9 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

נציב, $x_4=s$, $x_3=t$. מהשורה השנייה נקבל, $x_2-4t-9s=0 \Leftarrow x_2=4t+9s$.

ומהשורה הראשונה נקבל, $x_1+2t+4s=0 \Leftarrow x_1=-2t-4s$.

$$N(A)=\left\{\begin{pmatrix}-2t-4s\\4t+9s\\t\\s\end{pmatrix}: s,t\in R\right\}=\left\{t\begin{pmatrix}-2\\4\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-4\\9\\0\\1\end{pmatrix}: s,t\in F\right\}$$

לכן,

$$=span\left\{\begin{pmatrix}-2\\4\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\9\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

מכיוון ש $\left\{\begin{pmatrix}-2\\4\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\9\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ בת"ל, זהו בסיס למרחב האפס.

בפרט מימד מרחב האפס הוא 2.

1.2. (17 נק') האם קיימת מטריצה ממשית A שהקבוצה $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right\}$ היא בסיס למרחב העמודה שלה והקבוצה $\left\{\begin{pmatrix}1\\7\\0\end{pmatrix}\right\}$ היא בסיס למרחב האפס שלה?

אם כן, מצאו כזאת. אחרת, הוכיחו כי לא קיימת מטריצה כנ"ל.

פתרון: קיימת כזו, לדוגמה:

$$\begin{pmatrix}7 & -1 & 3\\14 & -2 & 4\end{pmatrix}$$

נשים לב: מטריצה זו אכן עונה על התנאים.

$$C(R)=span\left\{\begin{pmatrix}7\\14\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right\}=span\left\{7\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right\}$$

מכיוון ש $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right\}$ בת"ל ופורשת את מרחב העמודה, היא מהווה בסיס למרחב העמודה.

נשים לב, לפי משפט המימדים: $\dim N(A)+Rank(A)=3$ (כי 3 הוא מספר העמודות)

לכן: עבור המטריצה הנ"ל, מכיוון ש $Rank(A)=\dim C(A)=2$, $\dim N(A)+2=3$ ו $\dim N(A)=1$. לכן, על מנת להראות ש $\left\{\begin{pmatrix}1\\7\\0\end{pmatrix}\right\}$ הוא בסיס למרחב האפס, מ"ל כי

הוקטור $\begin{pmatrix}1\\7\\0\end{pmatrix}$ שייך למרחב האפס. אז, בתור קבוצה בת"ל (קבוצה בעלת איבר אחד שאינו איבר האפס), המוכלת ב $N(A)$ שגודלה הוא $\dim N(A)$, נקבל מהשלישי חינם, כי הקבוצה $\left\{\begin{pmatrix}1\\7\\0\end{pmatrix}\right\}$ אכן בסיס למרחב האפס. אבל

$$\begin{pmatrix}7 & -1 & 3\\14 & -2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\7\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

לכן, $\left\{\begin{pmatrix}1\\7\\0\end{pmatrix}\right\}$ אכן בסיס למרחב האפס.

2. (23 נק') יהי $V=M_{2x2}(R)$ מרחב וקטורי מעל R.

תהי $S=\left\{\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\4&1\end{pmatrix}\right\}\subseteq V$.

אם ניתן, השלימו את S לבסיס של V. אחרת, הוכיחו כי לא ניתן לעשות זאת.

פתרון:

נחשוב על אברי V כעל וקטורים ב R^4 באמצעות ההתאמה

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$$

ונבדוק אם ניתן להשלים את $S'=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\4\\1\end{pmatrix}\right\}$ לבסיס של R^4.

נרצה לדעת מתי וקטור מהצורה $\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$ שייך ל $spanS'$.

זה יקרה, אמ"ם למערכת הבאה יש פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&a\\2&1&2&b\\2&3&4&c\\1&1&1&d\end{array}\right)$$

נדרג ונקבל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&a\\2&1&2&b\\2&3&4&c\\1&1&1&d\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&a\\0&1&0&b-2a\\0&3&2&c-2a\\0&1&0&d-a\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&a\\0&1&0&b-2a\\0&0&2&c+4a-3b\\0&0&0&d+a-b\end{array}\right)$$

לכן, $\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\in SpanS'$ אמ"ם למערכת יש פתרון, כלומר אמ"ם $d+a-b=0$. לכן,

$$SpanS'=\left\{\begin{pmatrix}b-d\\b\\c\\d\end{pmatrix}:b,c,d\in R\right\}.$$

כעת, ניתן לפתור את התרגיל.

ראשית, נשים לב, כי S' בת"ל, אכן, ע"י הצבה $a=b=c=d=0$ במערכת שדירגנו,
נקבל כי הפתרון היחיד למערכת ההומוגנית המתאימה הוא הפתרון הטרוויאלי.

לכן, עפ"י משפט לכל, $v \notin SpanS'$ הקבוצה $S' \cup \{v\}$ גם כן בת"ל.

נבחר וקטור שלא שייך ל $spanS'$ (כל וקטור $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ בו $a \neq b-d$ יתאים): ניקח:

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

אזי $S' \cup \{v\}$ קבוצה בת"ל. מכיוון ש $|S' \cup \{v\}| = 4 = \dim_R R^4$, $S' \cup \{v\}$ בסיס של R^4.
כלומר, v משלים את S' לבסיס.
בחזרה למטריצות נקבל שהקבוצה

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq V$$

היא השלמה של S לבסיס של V.

3. יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

3.1. (20 נק') תהי $A \in M_{n\times n}(F)$ מטריצה ריבועית. אזי:

$N(A) \neq 0$ או $C(A) = F^n$.

הוכחה: אם $N(A) \neq 0$, סיימנו. לכן, מספיק להוכיח כי אם $N(A) = 0$ אז $C(A) = F^n$.
אבל, $N(A) = 0 \Leftarrow \dim_F N(A) = 0$. לכן, לפי משפט המימדים,

$$\dim_F N(A) + Rank(A) = n \Rightarrow$$
$$0 + Rank(A) = n \Rightarrow$$
$$Rank(A) = n$$

לכן, $\dim_F C(A) = RankA = n$. אבל, $C(A) \leq F^n$ תת מרחב וקטורי מאותו מימד סופי.
לכן, $C(A) = F^n$.

3.2. (19 נק') יהי V מרחב וקטורי ו $A, B \subseteq V$. אזי:

$span(A \cap B) = span(A) \cap span(B)$.

הפרכה: יהיו $V = R^2$, $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. A, B בת"ל מגודל 2, לכן בסיסים ל $V = R^2$. לכן, $span(A) = span(B) = R^2$ ו $span(A) \cap span(B) = R^2$.
לעומת זאת
$span(A \cap B) = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \neq R^2$. לכן, $span(A \cap B) \neq span(A) \cap span(B)$.