בוחן בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשע"ט

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום שם מלא ומספר ת"ז.
יש לענות על כל השאלות פתרון מלא ומנומק.
משך הבוחן: 90 דקות.

שאלה 1. קבוצת שורשי היחידה מסדר n מעל $\mathbb{C}$ היא

$$\Omega_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} = \left\{ \mathrm{cis}\frac{2\pi k}{n} \,\middle|\, k = 0, 1, \ldots, n-1 \right\}$$

זו תת־חבורה של $\mathbb{C}^*$. אם נסמן $\omega_n = \mathrm{cis}\frac{2\pi}{n}$, נקבל $\Omega_n = \langle \omega_n \rangle$. כלומר Ω_n היא תת־חבורה ציקלית ונוצרת על ידי ω_n. מפני ש-Ω_n מסדר n וציקלית, אז בהכרח $\Omega_n \cong \mathbb{Z}_n$.

נגדיר את קבוצת שורשי היחידה $\Omega_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$. הוכיחו:

1. Ω_∞ היא חבורה לגבי כפל. (איחוד חבורות הוא לא בהכרח חבורה!)
2. לכל $x \in \Omega_\infty$, $o(x) < \infty$ (כלומר: כל איבר ב-Ω_∞ הוא מסדר סופי).
3. Ω_∞ אינה ציקלית.

לחבורה כזו, שבה כל איבר הוא מסדר סופי, קוראים חבורה מפותלת.

שאלה 2. תנו דוגמא לפעולה נאמנה של חבורה לא טריוואלית G על קבוצה X עם איבר $x \in X$ כך ש- $\mathrm{stab}(x) = G$.

<u>תזכורות:</u>

- פעולה היא נאמנה אם האיבר היחיד שפועל טריוואלית על כל איברי X הוא איבר היחידה.
- $\mathrm{stab}(x) = \{g \in G \mid g * x = x\}$

שאלה 3. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

1. תהי G חבורה אבלית, ויהי $f : G \to H$ אפימורפיזם, אזי H אבלית.
2. קיים מונומורפיזם $f : D_7 \to S_5$