תרגיל לעבודה עצמית מספר 2

שאלה 1

עבור כל אחד מהפונקציות הנתונות בתחום הנתון בדוק באם
הפונקציה עולה ממש/יורדת ממש/לא עולה ולא יורדת. (ללא שימוש בנגזרת)

א. $f(x)=\cos x$ בתחום $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

ב. $f(x)=\cos x$ בתחום $[0,\pi]$.

ג. $f(x)=e^{\cos x}$ בתחום $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

ד. $f(x)=\frac{1}{x}$ בתחום $(0,\infty)$.

ה. $f(x)=\frac{1}{x}$ בתחום $(-\infty,0)$.

פתרון שאלה 1

א. נניח ש $0\le x_1<x_2\le\frac{\pi}{2}$ ונוכיח ש $f(x_2)-f(x_1)<0$.

נשתמש בזהות $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

$f(x_2)-f(x_1)=\cos x_2-\cos x_1=-2\cos\frac{x_1+x_2}{2}\cos\frac{x_2-x_1}{2}$.

מכיוון ש $0\le x_1<x_2\le\frac{\pi}{2}$ נקבל ש $0<\frac{x_2-x_1}{2}\le\frac{\pi}{4}$ ולכן $\cos\frac{x_2-x_1}{2}>0$.

מכיוון ש $0\le x_1<x_2\le\frac{\pi}{2}$ נקבל ש $0<\frac{x_2+x_1}{2}\le\frac{\pi}{2}$ ולכן $\cos\frac{x_2+x_1}{2}>0$.

סה"כ נקבל $-2\cos\frac{x_1+x_2}{2}\cos\frac{x_2-x_1}{2}<0$ ולכן הפונקציה מונוטונית יורדת ממש.

ב. הפונקציה יורדת . הוכחה דומה לסעיף א.

ג. ראינו בסעיף קודם שהפונקציה $\cos x$ עולה בתחום $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, בנוסף הפונקציה e^x עולה. ראינו בשיעור שאם הפונקציות f,g עולות ממש ב $\mathbb{R}$ אז הפונקציה $f\circ g$ גם עולה ממש.

ד. נניח ש $0<x_1<x_2$ ואז נקבל ש $\frac{1}{x_2}<\frac{1}{x_1}$ ז"א הפונקציה יורדת ממש.

ה. נניח ש $x_1<x_2<0$ ואז נקבל ש $\frac{1}{x_2}<\frac{1}{x_1}$ ז"א הפונקציה יורדת ממש.

שאלה 2

גזור את הפונקציות הבאות:

א. $\sin\left(3x^2+2\right)$. ב. $\left(x^7-3x^6-x^3\right)^5$ ג. $\frac{1}{x^7(1+x)^7}$ ד. $\frac{\sin x}{x}$

ה. $\frac{x}{1+\ln x}$. ו. $e^{\ln\left(x^2+1\right)+x}$ ז. $arc\left(\sin\left(\cos x\right)\right)$ ח. $\arctan\left(e^{2x}\right)$.

ט. $\tan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.   י. $x^{\sin x}$ יא. $\log_{\sin x} x$.

פתרון

א. $\left(\sin\left(3x^2+2\right)\right)'=6x\cos\left(3x^2+2\right)$.

ב. $\left(\left(x^7-3x^6-x^3\right)^5\right)'=5\left(x^7-3x^6-x^3\right)^4\cdot\left(7x^6-18x^5-3x^2\right)$.

ג. $$\frac{1}{x^7\left(1+x\right)^7}=\left(x+x^2\right)^{-7}$$
$$\left(\left(x+x^2\right)^{-7}\right)'=-7\left(x+x^2\right)^{-8}\left(1+2x\right)=\frac{-7-14x}{\left(x+x^2\right)^8}.$$

ד. $\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$.

ה. $\left(\frac{x}{1+\ln x}\right)'=\frac{1+\ln x-\frac{1}{x}\cdot x}{\left(1+\ln x\right)^2}=\frac{\ln x}{\left(1+\ln x\right)^2}$.

ו. $\left(e^{\ln\left(x^2+1\right)+x}\right)'=\left(\frac{2x}{x^2+1}+1\right)e^{\ln\left(x^2+1\right)+x}$.

ז. $arc\left(\sin\left(\cos x\right)\right)=arc\left(\sin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)\right)=\frac{\pi}{2}-x\Rightarrow\left(arc\left(\sin\left(\cos x\right)\right)\right)'=-1$.

ח. $\left(\arctan\left(e^{2x}\right)\right)'=\frac{2e^{2x}}{1+e^{4x}}$.

ט. $\left(\tan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)'=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}=\frac{2}{\left(1-x\right)^2\cos^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$.

י. $x^{\sin x}=e^{\ln x^{\sin x}}=e^{\sin x\ln x}\Rightarrow\left(x^{\sin x}\right)'=\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)e^{\sin x\ln x}$.

שאלה 3

מצא את הנגזרת של הפונקציה $f\left(x\right)=\begin{cases}\sin^2 x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ בכל נקודה.

פתרון

עבור $x\neq 0$ נקבל $f'\left(x\right)=2\sin x\cos x\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\sin^2 x\cos\frac{1}{x}$.

עבור $x=0$ נשתמש בהגדרת הנגזרת

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(0+h\right)-f\left(0\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin^2 h\sin\frac{1}{h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\cdot\sin h\cdot\sin\frac{1}{h}=0$$

השוויון האחרון נובע מכיוון ש $\sin\frac{1}{h}$ פונקציה חסומה.

<u>שאלה 4</u>

נגדיר פונקציה $f\left(x\right)=\begin{cases} ax+b & x>1 \\ x^2 & x\le 1\end{cases}$.

מה צריכים להיות a ו b כדי ש f תהייה גזירה בכל נקודה ב $\mathbb{R}$? נמק את תשובתך!

<u>פתרון</u>

נשים לב ש $f'_+(1)=a, f'_-(1)=2$ ז"א $a=2$ כדי שהפונקציה תהייה גזירה היא חייבת להיות רציפה ולכן $2\cdot 1+b=1^2\Rightarrow b=-1$.

<u>שאלה 5</u>

כמה פתרונות יש למשוואה $x\sin x+\cos x=x^2$ בקטע $[0,\infty)$.

<u>פתרון</u>

יש לבדוק כמה פתרונות יש למשוואה $x\sin x+\cos x-x^2=0$ בקטע $[0,\infty)$.

נתבונן בפונקציה $f\left(x\right)=x\sin x+\cos x-x^2$.

$f'\left(x\right)=x\sin x+\cos x-x^2=\sin x+x\cos x-\sin x-2x=x\cos x-2x=x\left(\cos x-2\right)$.

מכיוון שפונקצית הנגזרת מתאפסת רק בנקודה $x=0$ נקבל ממשפט רול שיש לכל היותר פתרון אחד למשוואה $f\left(x\right)=x\sin x+\cos x-x^2$ בקטע $[0,\infty)$.

$f\left(0\right)=1$, $f\left(10\right)=10\cdot\sin 10+\cos 10-100<-81$ וזאת מכיוון ש $|\sin x|<1,|\cos x|<1$.

לפי משפט ערך הביניים נקבל שיש לפחות פתרון אחד בקטע $[0,10]$ ואז יש לפחות פתרון אחד בקטע $[0,\infty)$.

סה"כ קיבלנו שיש לפחות פתרון אחד ולכל היותר פתרון אחד בקטע $[0,\infty)$ ז"א יש בדיוק פתרון אחד בקטע $[0,\infty)$.

<u>שאלה 6</u>

מצא את הנקודה/נקודות c ממשפט לגרנז' עבור:

א. $f\left(x\right)=x^2$ ב $[0,3]$. ב. $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$ ב $[1,2]$. ג. $f\left(x\right)=x^3$ ב $[-1,1]$.

ד. $f\left(x\right)=x^3-2x^2-x+2$ ב $[-3,3]$.

ה. הראה של $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$ אין נקודת לגרנז' c בכל $[a,b]$ כך ש $a<0<b$. מדוע?

<u>פתרון</u>

$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

א. $3=\frac{9}{3}=\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(c)$ בנוסף $f'(x)=2x \Leftarrow f'(c)=2c$ סה"כ קיבלנו $2c=3 \Leftarrow c=1.5$.

ב. $-\frac{1}{2}=\frac{\frac{1}{2}-1}{1}=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f'(c)$ בנוסף $f'(x)=-\frac{1}{x^2} \Leftarrow f'(c)=-\frac{1}{c^2}$ סה"כ קיבלנו $c=\sqrt{2}$.

ג. $1=\frac{2}{2}=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=f'(c)$ בנוסף $f'(x)=3x^2 \Leftarrow f'(c)=3c^2$ סה"כ קיבלנו ש $c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

ד. $-\frac{1}{ab}=\frac{a-b}{ab(b-a)}=\frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{b-a}=f'(c)$ מכיוון ש $a<0<b$ נקבל ש $-\frac{1}{ab}>0$ ואילו $f'(x)=-\frac{1}{x^2}<0$.

ייתכן מכיוון שהפונקציה לא רציפה בנקודה $x=0$.