# נגזרת

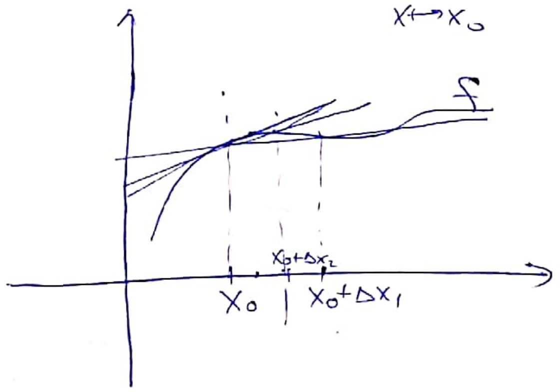
**הגדרה:** תהי $f$ פונקציה ממשית המוגדרת בסביבה מלאה של $x_0$. הנגזרת של $f$ בנקודה $x_0$ היא הגבול:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}_{\text{(נשתמש בעיקר בגבול הזה)}}$$

(כי

$$x=x_0+\Delta x \Rightarrow \Delta x=x-x_0 \Rightarrow \Delta x\to 0,\ x\to x_0$$

$f'(x_0)$ הוא שיפוע של המשיק לגרף של הפונקציה $f$ בנקודה $x_0$




**דוגמא:** תחשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x)=x^2+3$ בנקודה $x_0\in\mathbb{R}$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x+x_0)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x+x_0)^2+3-(x_0^2+3)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2+2x_0\cdot\Delta x+\cancel{x_0^2}+\cancel{3}-\cancel{x_0^2}-\cancel{3}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2+2x_0\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2x_0)=2x_0$$

**הערה:** שימוש בגבול הראשון כאן זה יותר פשוט:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2+\cancel{3}-x_0^2-\cancel{3}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}(x+x_0)=2x_0$$

**תרגיל:** חשבו את הנגזרת של $f(x)=\sqrt{x}$ בנקודה $x_0=2$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{2+\Delta x}-\sqrt{2}}{\Delta x}\cdot\frac{\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2}}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{2}+\cancel{\Delta x}-\cancel{2}}{\cancel{\Delta x}(\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2})}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=f'(2)$$

## אריתמטיקה של נגזרות

בהינתן פונקציות אלמנטריות שגזירות בתחום מסוים, כדי למצוא את הנגזרת של כל אחת מהן נשתמש בנוסחאות הבאות:

1. $(c\cdot f)'=c\cdot f'$
2. $(f+g)'=f'+g'$
3. $(f\cdot g)'=f'g+g'f$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-g'f}{g^2}$
5. $(f\circ g)'=f'(g)\cdot g'$ (כלל השרשרת)
6. $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

**נוסחאות שימושיות**

1. $f(x)=x^n \quad n\in\mathbb{Q} \Leftarrow f'(x)=n\cdot x^{n-1}$
2. $f(x)=\cos(x) \Leftarrow f'(x)=-\sin(x)$
3. $f(x)=\sin(x) \Leftarrow f'(x)=\cos(x)$
4. $f(x)=\ln(x) \Leftarrow f'(x)=\frac{1}{x}$
5. $f(x)=e^x \Leftarrow f'(x)=e^x$
6. $f(x)=a^x=e^{x\ln(a)} \Leftarrow f'(x)=a^x\cdot\ln(a)$

תרגיל: חשב את הנגזרת של הפונקציות הבאות:

1.

$$\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right)' = f(x)$$

פתרון (שים לב ש-f היא הרכבה של שתי
פונקציות $g(x)=\sqrt{x}$ $\qquad h(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2}$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = g\circ h(x) = g(h(x)) = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$$

(נגזור לפי כלל השרשרת:

$$f'(x) = g'(h(x))\cdot h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}}\cdot\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)' =$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{2x(1-x^2)-(1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\cdot\frac{2x-\cancel{2x^3}+2x+\cancel{2x^3}}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\cdot\frac{\overset{2}{\cancel{4}}x}{(1-x^2)^2}$$

2.

$$f(x) = e^{\sqrt{\ln(x)}}$$

פתרון: f זו הרכבה של 2 פונקציות:

$$g(x) = e^x \qquad h(x) = \sqrt{\ln(x)}$$

$$f(x) = g\circ h(x) = g(h(x)) = e^{\sqrt{\ln(x)}}$$

(נגזור לפי כלל השרשרת:

$$f'(x) = g'(h(x))\cdot h'(x) = e^{\sqrt{\ln(x)}}\cdot\left(\sqrt{\ln(x)}\right)' =$$

$$= e^{\sqrt{\ln(x)}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\ln(x)}}\cdot(\ln(x))' = e^{\sqrt{\ln(x)}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\ln(x)}}\cdot\frac{1}{x}$$

4

3. $$f(x)=\sqrt{2^{\frac{1}{x}}}=e^{\ln\sqrt{2^{\frac{1}{x}}}}=e^{\frac{1}{2x}\ln(2)}$$

$$f'(x)=e^{\frac{\ln(2)}{2x}}\cdot\left(\frac{1}{2x}\ln(2)\right)'=$$

$$=\sqrt{2^{\frac{1}{x}}}\cdot\left(\frac{\ln(2)}{2}\cdot x^{-1}\right)'=$$

$$=\sqrt{2^{\frac{1}{x}}}\left(-\frac{\ln(2)}{2}\cdot x^{-1-1}\right)=\sqrt{2^{\frac{1}{x}}}\left(-\frac{\ln(2)}{2x^2}\right)$$

4. $$f(x)=x^{\sin(x)}$$

פתרון

$$f(x)=e^{\sin(x)\ln(x)}$$

$$f'(x)=e^{\sin(x)\cdot\ln(x)}\cdot(\sin(x)\cdot\ln(x))'=$$

$$=e^{\sin(x)\cdot\ln(x)}\left(\cos(x)\cdot\ln(x)+\frac{\sin(x)}{x}\right)=$$

$$=x^{\sin(x)}\left(\cos(x)\cdot\ln(x)+\frac{\sin(x)}{x}\right)$$

תרגיל: גזור את הפונקציה הבאה:

$$f(x)=|x|\cdot|5-x|$$

פתרון: נפתח את הפונקציה:

$$f(x)=\begin{cases}-x(5-x) & x\leq 0\\ x(5-x) & 0<x\leq 5\\ -x(5-x) & x>5\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}x^2-5x & x\leq 0\\ -x^2+5x & 0<x\leq 5\\ x^2-5x & x>5\end{cases}$$

(נבדוק את הפונקציה גזירה בכל אחד מ-התחומים
$x<0 \cup 0<x<5 \cup x>5$ :

$x<0$: $f(x)=x^2-5x \Leftarrow f'(x)=2x-5$

$0<x<5$: $f(x)=5x-x^2 \Leftarrow f'(x)=5-2x$

$x>5$: $f(x)=x^2-5x \Leftarrow f'(x)=2x-5$

(נבדוק לפי ההגדרה האם ד"מת (גזירה
בנקודות: $x=0.5$ :

~~$x=0$:~~

$$\cancel{f'(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2-5x-0}{x}=\lim_{x\to0}(x-5)=-5}$$

$x=0$: (נחשב את הגבול הכפול:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

מאחר שהפונקציה מפוצלת בנקודה $x=0$
(נחשב את הגבולות החד צדדיים:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{5x-x^2-0}{x}=\lim_{x\to0^+}(5-x)=5$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2-5x-0}{x-0}=\lim_{x\to0^-}(x-5)=-5$$

הגבולות החד צדדיים ד"מ אך לא שווים
לכן הפונקציה לא גזירה ב $x=0$.

כמו כן היא לא גזירה בנקודה $x=5$
!!!

f גזירה בתחומים $x<0 \cup 0<x<5 \cup x>5$
כלומר היא גזירה בכל נקודה ובפרט ב-$x=0.5$

## נקודת קיצון

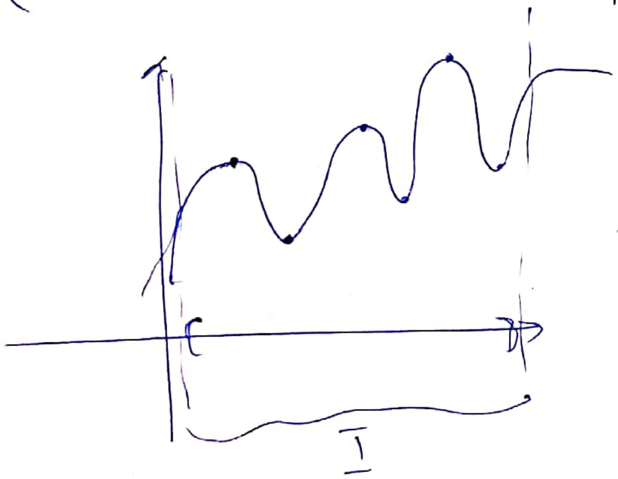
**הגדרות:**

1. יהי $I\subset\mathbb{R}$ אינטרוול. נאמר כי ל-$f$ יש מקסימום מקומי בנקודה $c\in I$ אם קיים קטע פתוח $c\in(a,b)\subset I$ כך ש- $f(c)\ge f(x)$ לכל $x\in(a,b)$

(באופן דומה מגדירים מינימום מקומי אם בהכרח $f(c)\le f(x)$ $\forall x\in(a,b)$)

2. יהי $I\subset\mathbb{R}$ אינטרוול. נאמר כי ל-$f$ יש מקסימום מוחלט בנקודה $c\in I$ אם $f(c)\ge f(x)$ לכל $x\in I$

(מינימום מוחלט מגדירים באופן דומה רק אם בהכרח $f(c)\le f(x)$)




**הגדרה:** נאמר ש- $c$ היא נקודה קריטית של $f$ באינטרוול $I$ אם היא מקיימת לפחות אחד מהמצבים הבאים:

1. $f'(c)=0$
2. $c$ היא נקודת קצה של $I$
3. $f'(c)$ לא מוגדרת.

**משפט נקודה קריטית:**

אם $f$ פונקציה רציפה באינטרוול $I$ ותהי $c\in I$ נקודת קיצון. אזי $c$ מתקבלת בהכרח בנקודה קריטית.

<u>תרגיל</u> מצאו את כל הנקודות קיצון של
$f(x)=\sin(x)+\cos(x)$ בתחום $(0,2\pi)$

<u>פתרון:</u> נמצא את כל הנקודות החשודות
של הפונקציה, כלומר את כל הנקודות שמקיימות
את אחד משלושה התנאים:

- נקודות קצה: אין כי הקטע פתוח.
- נקודות שבהן $f$ לא גזירה: אין כי $f$ גזירה בכל תחום.
- נגזור את $f$ ונשווה את הנגזרת לאפס:

$$f'(x)=\cos(x)-\sin(x)=0$$
$$\Updownarrow$$
$$\cos(x)=\sin(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$x=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$$
$$\Downarrow$$
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$$
$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$$

לאחר שמצאנו את כל הנקודות החשודות, נמיין אותן.

<u>פרק א'</u> הנקודה הראשונה.

נסתכל בתחום $(0,\frac{5\pi}{4})$ $\frac{\pi}{4}\in$ זו נקודה חשודה יחידה
בתחום הזה. נבחר נקודה $0<\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{4}$, ונקודה
$\frac{\pi}{4}<\pi<\frac{5\pi}{4}$, ונציב אותן בפונקציה ונשווה עם הערך

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2}<f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}>f(\pi)=1 \qquad f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$$

לכן הפונקציה מקבלת מקסימום מקומי ב- $\frac{\pi}{4}$.

$\frac{5\pi}{4}$ היא נקודה חשודה יחידה בתחום $(\frac{\pi}{4},2\pi)$
באותו אופן כמו מקודם, נבחר נקודה $\pi\in(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$
ונקודה $\frac{3\pi}{2}\in(\frac{5\pi}{4},2\pi)$.

$$f(\pi)=-1>f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}<f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1$$

לכן הפונקציה מקבלת מינימום מקומי ב $\frac{5\pi}{4}$

**דרך ב:** מבחן הנגזרת השנייה:

$$f''(x) = -\sin(x) - \cos(x)$$

ולכן

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} < 0$$

ולכן זה מקסימום מקומי.

$$f''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2} > 0$$

ולכן זה מינימום מקומי.