חלק שלישי- עם פתרונות בהרחבה

איזומטריות

1. הגדרה: יהו (X,d) ו(Y,ρ) שני מרחבים מטריים. פונקציה $f:X\to Y$ נקראת איזומטריה אם f על וכן מתקיים: לכל $x_1,x_2\in X$

$$\rho(f(x_1),f(x_2))=d(x_1,x_2)$$

2. הערה: כל איזומטריה היא פונקציה חח"ע.
הסבר: נניח $f(x_1)=f(x_2)$. אז $\rho(f(x_1),f(x_2))=0$. ולכן $d(x_1,x_2)=0$. מכאן נקבל ש$x_1=x_2$.

3. פונקציה שמקיימת רק את התנאי השני (כלומר, שומרת מרחק) אבל לא בהכרח על, נקראת "שיכון איזומטרי".

4. תרגיל: יהי $f:(X,d)\to(X,d)$ שיכון איזומטרי. האם f בהכרח על?
פתרון: לא. לדוגמא אם ניקח את (X,d) להיות (l_∞,d_∞) מרחב הסדרות החסומות עם מטריקת הסופרימום (ראו סעיף 4 ב"התכנסות"), וניקח את f להיות הפונקציה הבאה:

$$f(x_1,x_2,x_3,...)=(0,x_1,x_2,x_3,...)$$

קל לראות שזהו שיכון איזומטרי שאינו על.

התכנסות

1. הגדרה: יהי (X,d) מרחב מטרי, $x\in X$ ו$(x_n)\subseteq X$ סדרה. נאמר שהסדרה (x_n) מתכנסת לx, ונסמן $x_n\to x$ אם מתקיים: לכל $0<\epsilon\in\mathbb{R}$, קיים n_0, כך שלכל $n\geq n_0$, $x_n\in B(x,\epsilon)$. שקול: $d(x_n,x)<\epsilon$. במילים: החל ממקום מסויים, כל איברי הסדרה נמצאים בכדור. במילים אחרות: החל ממקום מסוים בסדרה, המרחק של כל איברי הסדרה מx קטן מϵ.

2. בהרצאה הוכחתם את השקילות הבאה: $x_n\to x$ אמ"ם $d(x_n,x)\to 0$, כאשר השאיפה השניה היא שאיפה בממשיים, שאותה אנחנו כבר מכירים מאינפי.

3. תרגיל: הוכיחו כי במטריקה ה3 אדית הסדרה $(2\cdot 3^n+5)$ מתכנסת ל5 $(2\cdot 3^n+5\to 5)$
פתרון: נעזר בקריטריון השקול להתכנסות. לצורך כך צריך לחשב את המרחק $d_3(2\cdot 3^n+5,5)$. ניזכר כי

$$d_3(2\cdot 3^n+5,5)=\frac{1}{3^{k(2\cdot 3^n+5,5)}}$$

כמו כן $k(2\cdot 3^n+5,5)=\max\{i:3^i|2\cdot 3^n+5-5\}=n$
לכן $d_3(2\cdot 3^n+5,5)=\frac{1}{3^{k(2\cdot 3^n+5,5)}}=\frac{1}{3^n}$
$d_3(2\cdot 3^n+5,5)=\frac{1}{3^n}\to 0$

4. תזכורת: l_∞ הוא מרחב הסדרות החסומות מעל הממשיים. כלומר:

$$l_\infty = \{(x_i) : \sup|x_i| < \infty\}$$

זהו מרחב נורמי (ולכן מטרי) עם הנורמה:

$$||(x_i)|| = \sup|x_i|$$

תרגיל: תהא (x^n) של איברים בl_∞ (כלומר, כל איבר בסדרה הוא בעצמו סדרה אינסופית של מספרים ממשיים) ו x איבר בl_∞ (כלומר, סדרה ממשית חסומה). האם $x^n \to x$ גורר התכנסות רכיב-רכיב?
במילים: נניח ש$x^n \to x$. נשים לב שכל איבר בסדרה, וכן x בעצמו, הם סדרות אינסופיות. נסמן בx_i את הרכיב הi של x, ובx_i^n את הרכיב הi של x^n. למשל: אם

$$x^n = (n, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, ...)$$

אז $x_1^n = n, x_2^n = \frac{n}{2}$, ובאופן כללי $x_i^n = \frac{n}{i}$.
השאלה היא: אם $x^n \to x$ בl_∞, האם מתקיים שלכל i, $x_i^n \to x_i$ ב$\mathbb{R}$?
האם ההיפך נכון? כלומר, אם אנחנו יודעים שלכל i $x_i^n \to x_i$, האם מתקיים ש$x^n \to x$?
פתרון:
הכיוון הראשון נכון. נניח ש$x^n \to x$. יהי i טבעי. אנחנו רוצים להוכיח ש $x_i^n \to x_i$. נראה שהמרחק בינהם שואף ל0. ובכן: $|x_i^n - x_i| \leq \sup_i |x_i^n - x_i| = \|x^n - x\| \to 0$.
הצד השני לא נכון, למשל $x^n = e_n$, כלומר, הסדרה האינסופית שברכיב הn שלה יש 1, ובכל שאר הרכיבים יש 0. יש התכנסות רכיב רכיב ל 0 (כלומר, הוקטור האינסופי שכולו אפסים) אבל $\|e_n - 0\| = 1$.

5. הגדרה: נאמר שסדרה $\{x_n\}$ היא סדרת קושי, אם לכל $\epsilon > 0$, קיים n_0, כך שלכל $n, m > n_0$ מתקיים: $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

6. תרגיל: יהא (X, d) מ״מ. כל סדרה מתכנסת היא קושי.
פתרון: (x_n) מתכנסת ל x. נראה שהיא קושי: יהא ϵ נתון. אזי קיים n_0 כך ש

$$\forall n \geq n_0 : d(x_n, x) \leq \frac{\epsilon}{2}$$

לכן

$$\forall n, m \geq n_0 : d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

7. תרגיל: יהא (X, d) מ״מ ותהא (x_n) סדרת קושי שיש לה ת״ס מתכנסת (x_{n_k}) אזי היא מתכנסת.
פתרון: יהא ϵ נתון. נסמן x הגבול של ת״ס. לכן קיים k_0 כך ש

$$\forall k \geq k_0 : d(x_{n_k}, x) \leq \frac{\epsilon}{2}$$

מהגדרת הגבול. בנוסף מהגדרת סדרת קושי קיים n_0 כך ש

$$\forall n, m \geq n_0 : d(x_n, x_m) \leq \frac{\epsilon}{2}$$

לכן עבור $N_0 = \max\{k_0, n_0\}$ מתקיים כי

$$\forall n \geq N_0 : d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

כאשר לכל n נבחר $n \leq n_k$.

8. תרגיל: יהא (X, d) מ"מ הוכיחו כי כל סדרת קושי (x_n) חסומה.
פתרון: קיים n_0 כך ש $\forall n, m \geq n_0 : d(x_n, x_m) \leq 1$. נגדיר $r = \max_{i,j \leq n_0} d(x_i, x_j)$.
טענה $diam(x_n) \leq r + 1$. הוכחה:

$$d(x_i, x_j) \leq \begin{cases} r & i, j \leq n_0 \\ d(x_i, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, x_j) \leq r + 1 & i \leq n_0 < j \\ 1 & n_0 < i, j \end{cases}$$

וסיימנו.

שלמות

1. הגדרה: מ"מ נקרא שלם אם כל סדרת קושי מתכנסת.

2. תרגיל: $(C[0,1], d_1)$ אינו שלם. (תיזכורת: $C[0,1]$ הינו מרחב הפונקציות הרציפות מהקטע $[0,1]$ לממשיים. d_1 היא המטריקה המושרית מהנורמה הבאה:

$$||f|| = \int_0^1 |f(x)| dx$$

פתרון: ניתן דוגמא לסדרת קושי שאינה מתכנסת. נגדיר $\{f_n\}_{n \geq 2}$ להיות 0 בקטע $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ אח"כ עולה ל 1 בקטע $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right]$ ואח"כ שווה 1 בקטע $\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1\right]$. מתקיים כי לכל $n < m$ כי

$$\int_0^1 |f_n - f_m| \, dx \leq \frac{1}{n} \cdot 1$$

כי הם נבדלות רק בקטע $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right]$ וההבדל הוא 1 לכל היותר. ולכן זוהי סדרת קושי. בנוסף אם f_n מתכנסת היא מתכנסת לפונקצית מדרגה ששווה 0 בקטע $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ ו 1 בקטע $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ שאינה שייכת למרחב.

3. תרגיל: נוכיח כי $(\mathbb{Z}, d_p)$ אינו שלם לכל $p \neq 2$. (הטענה נכונה גם עבור $p = 2$, אבל אז ההוכחה טיפה שונה): נעזר בטענות הבאות:

   (א) טענה: אם $x_n \to x$ ב d_p אזי $cx_n \to cx$ ב d_p.
   הוכחה: כיוון ש $\max\{k : k | (x_n - x)\} \leq \max\{k : k | c(x_n - x)\}$ נקבל כי

$$d(cx_n, cx) = \frac{1}{p^{k(cx_n, cx)}} \leq \frac{1}{p^{k(x_n, x)}} = d(x_n, x) \to 0$$

i. הערה: זה לא נכון במקרה כללי (כלומר, קיימים מרחבים מטריים מעל $\mathbb{R}$, שבהם כפל בסקלר לא שומר על התכנסות). למשל ב $(\mathbb{R},d)$ המוגדרת ע״י $d(x,y)=|f(x)-f(y)|$ כאשר f היא הזהות פרט להחלפה של $2 \rightleftarrows 1$. מתקיים כי $x_n=4+\frac{1}{n}\to x=4$ אבל $\frac{1}{2}x_n=2+\frac{1}{2n}$ לא שואף ל 2 כי

$$d(\frac{1}{2}x_n,2)=\left|2+\frac{1}{2n}-1\right|=\left|1+\frac{1}{2n}\right|\to 1\neq 0$$

(ב) טענה: $a_n=\sum_{i=0}^{n}p^i=\frac{p^{n+1}-1}{p-1}$ לא מתכנסת אבל היא סדרת קושי (ולכן המרחב לא שלם).

הוכחה: לכל $n<m$ מתקיים כי

$$d(a_n,a_m)=\frac{1}{p^{k(\sum_{i=n+1}^{m}p^i,0)}}=\frac{1}{p^{n+1}}$$

ולכן זוהי סדרת קושי. בנוסף אם הסדרה מתכנסת לa, $a_n\to a$' אזי גם $p^{n+1}-1=(p-1)\,a_n\to(p-1)\,a$ לפי הסעיף הקודם. נסמן ב $\bar{t}=\max\{t:\ p^t|\,(-1-a\,(p-1))\}$ (קיים מקסימום, כי מכיוון שהנחנו ש$p\neq 2$, הביטוי שונה מ0). טענה: הסדרה

$$d(p^{n+1}-1,(p-1)\,a)$$

קבועה לבסוף על $\frac{1}{p^{\bar{t}}}$. הסבר: צריך לחשב את $k(p^{n+1}-1,(p-1)a)$. כלומר, מי החזקה המקסימלית של p שמחלקת את $p^{n+1}-1-(p-1)a$. נסמן $-1-(p-1)a=p^{\bar{t}}m$ כאשר $(p,m)=1$. כלומר, עלינו למצוא מי החזקה הכי גבוהה של p שמחלקת את $p^{n+1}-p^{\bar{t}}m$. ברור שהחל מ$k=n$, נקבל ש$p^{\bar{t}}|p^{n+1}-p^{\bar{t}}m$, כי $p^{\bar{t}}|p^{\bar{t}}m\wedge p^{\bar{t}}|p^{n+1}$. כמו כן, $p^{\bar{t}+1}\nmid p^{n+1}-p^{\bar{t}}m$, כי $p^{\bar{t}+1}\ |\ p^{n+1}$, אבל $p^{n+1}\nmid p^{\bar{t}}m$.

מסקנה:

$$d(p^{n+1}-1,(p-1)\,a)\to\frac{1}{p^{\bar{t}}}\neq 0$$

בסתירה להתכנסות.

קבוצות פתוחות/סגורות

1. הגדרה: קבוצות פתוחות וסגורות ב מ״מ. ב (X,d) קבוצה O היא פתוחה אם $\forall x\in O\exists r>0:\ B(x,r)\subseteq O$. במילים: O פתוחה אם לכל איבר x בO, קיים איזשהו רדיוס r, כך שכל הכדור סביב x ברדיוס r מוכל בO.
בהרצאה הוכחתם שכל כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה (שימו לב שזה לא טריוויאלי!), וכן שחיתוך סופי ואיחוד כלשהו של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה.
נגיד שקבוצה C היא סגורה אם המשלים שלה פתוח.

2. תרגיל: יהא (X,d) מ״מ אזי כל כדור סגור $B=B[x,r]$ הוא קבוצה סגורה.
הוכחה: צריך להוכיח כי המשלים פתוח. יהא y במשלים כלומר $d(y,x)>r$ נגדיר $r'=$

$d(y,x)-r$ ונראה כי $B(y,r')$ מוכל במשלים. אכן יהא $z\in B(y,r')$ ונניח בשלילה כי $d(x,z)\le r$ אזי

$$d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)<r+r'=d(y,x)$$

סתירה.

3. תרגיל: ב l_∞ נגדיר C קבוצת הסדרות הקבועות אזי C סגורה.
הוכחה: תהא x סדרה לא קבועה. יהיו $a<b$ שני איברים בה. נגדיר $r=\frac{b-a}{2}$ ונראה כי $B(x,r)$ מוכל $\bar{C}$. אכן, יהא $y\in B(x,r)$ ונניח בשלילה כי y סדרה קבוע (c). אזי $\max\{|c-b|,|c-a|\}\le\|y-x\|<r$ ואז

$$|b-a|\le|c-b|+|c-a|<2r=b-a$$

סתירה.

4. תרגיל: יהא (X,d) מ״מ. כל קבוצה סגורה S היא חיתוך בן מניה של פתוחות $S=\cap_n O_n$.
פתרון: נגדיר $O_n=\cup_{x\in S}B(x,\frac{1}{n})$. זאת קבוצה פתוחה כאיחוד של כדורים פתוחים. ונוכיח כי $S=\cap_n O_n$. אכן $(\subseteq)$ $S\subseteq O_n$ לכל n (כי כל $x\in S$ מקיים $x\in B(x,\frac{1}{n})$) ולכן גם בחיתוך.
$(\supseteq)$ יהא $y\in\bar{S}$ ונראה שהוא לא בחיתוך. אכן y בקבוצה פתוחה ולכן $B(y,\frac{1}{n})\subseteq\bar{S}$ עבור n כלשהוא. לכן $y\notin O_n$ (כי לכל $x\in S$ מתקיים $d(y,x)\ge\frac{1}{n}$) ולכן y לא בחיתוך $\cap_n O_n$.

מטריקות שקולות

1. הגדרה: תהי X קבוצה, ונגדיר עליה שתי מטריקות, d ו d'. נאמר שd ו d' שקולות אם מתקיים התנאי הבא: לכל סדרה $\{x_n\}\subseteq X$ ואיבר $x\in X$, $x_n\xrightarrow{d}x$ אמ״מ $x_n\xrightarrow{d'}x$

2. דוגמא: יהי (X,d) מרחב מטרי, ויהי $0<\alpha\in\mathbb{R}$. נגדיר על X מטריקה חדשה $\rho(x,y)=:$ $\alpha d(x,y)$. (בידקו שזאת אכן מטריקה). שתי המטריקות הנ״ל שקולות.
הוכחה: נניח ש$x_n\xrightarrow{d}x$. כלומר, $d(x_n,x)\to 0$. לפי כללי התכנסות בממשיים, $\rho(x_n,x)=$ $\alpha d(x_n,x)\to\alpha\cdot 0=0$. כלומר $x_n\xrightarrow{\rho}x$. הכיוון השני מתקבל ע״י החלפת α ב $\frac{1}{\alpha}$.

3. דוגמא נוספת:

(א) נגדיר על $\mathbb{N}$ שתי מטריקות: המטריקה הדיסקרטית, והמטריקה שמושרית מהממשיים. (במטריקה הדיסקרטית המרחק בין כל שני מספרים שונים הוא 1. במטריקה שמושרית מהממשיים, כלומר, האוקלידית, המרחק בין m לn הוא $|m-n|$). האם המטריקות שקולות?
פתרון: כן. כי בשניהן סדרות מתכנסות הן רק סדרות קבועות לבסוף. כלומר, אם $x_n\to x$ לפי המטריקה הדיסקרטית, אז החל ממקום מסויים $x_n=x$, ולכן $x_n\to x$ לפי המטריקה האוקלידית. אותו טיעון עובד גם בכיוון השני.

4. כעת ניתן דוגמא נגדית: נסתכל על המרחב l_1. זהו המרחב של כל הסדרות הממשיות שהטור שלהן מתכנס בהחלט. כלומר,

$$l_1=\{(x_n)|\Sigma|x_n|<\infty\}$$

על l_1יש נורמה טבעית שמסומנת $||\cdot||_1$, שמוגדרת ע"י

$$||(x_n)||=\Sigma|x_n|$$

בנוסף, $l_1\subseteq l_\infty$, ולכן מוגדרת עליו גם נורמת אינסוף (נקראת גם "נורמת הסופרימום"). שתיהן מגדירות את המטריקות d_1 ו d_∞ בהתאמה.
תרגיל: הראו כי d_1 וd_∞ לא שקולות על l_1.
פתרון: נסתכל על הסדרה:

$$(1,0,0,0...)$$

$$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0,...)$$

$$(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},0,0...)$$

ובאופן כללי:

$$x^n=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n},0,\dots\right)$$

אזי, ב d_∞ הסדרה שואפת לוקטור האפס. (ניתן לראות כי $d_\infty(x^n,0)=\dfrac{1}{n}\to 0$). אבל ב d_1 לא, מכיוון ש $d_1(x^n,0)=1\nrightarrow 0$.

5. תזכורת: לכל פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ חח"ע, ניתן להגדיר מטריקה על $\mathbb{R}$ באופן הבא:

$$d_f(x,y)=|f(x)-f(y)|$$

(בידקו שזו אכן מטריקה).

6. תרגיל: אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה וחח"ע. אז ערך מוחלט שקול למטריקה $d_f(x,y)=|f(x)-f(y)|$
הוכחה: אם $|x_n-x|\to 0$ אזי $d_f(x_n,x)=|f(x_n)-f(x)|\to 0$ מרציפות. בכיוון השני: אם $|f(x_n)-f(x)|\to 0$ כיוון ש f^{-1} רציפה נקבל כי $|x_n-x|\to 0$.

7. תרגיל: יהיו d,ρ שתי מטריקות שקולות על אותה קבוצה X. נניח שאחת המטריקות שלמה. האם גם השניה שלמה?
פתרון: לא. ניתן דוגמא נגדית.
נסתכל על המטריקה d_f על הממשיים, המוגדרת ע"י הפונקציה $f(x)=e^x$. המטריקה השניה שניקח היא המטריקה האוקלידית. $(\mathbb{R},|*|)$. שתי המטריקות שקולות לפי התרגיל הקודם. כמו כן, ידוע ש$(\mathbb{R},|*|)$ שלם. נראה ש$(\mathbb{R},d_f)$ לא שלם. לצורך כך ניקח את הסדרה: $\left\{\ln\frac{1}{n}\right\}$. זוהי סדרת קושי כי

$$d_f(\ln\frac{1}{n},\ln\frac{1}{m})=|e^{\ln\frac{1}{n}}-e^{\ln\frac{1}{m}}|=|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}|$$

עבור הביטוי הימני ביותר, ידוע שלכל $\epsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n, m > n_0$, $|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| < \epsilon$.
לכן התנאי של סדרת קושי מתקיים. כעת נוכיח שהסדרה לא מתכנסת. נניח שהיא מתכנסת לx. אזי:

$$d_f(\ln\frac{1}{n}, x) = |e^{\ln\frac{1}{n}} - e^x| = |\frac{1}{n} - e^x| \to 0$$

כלומר, $\frac{1}{n} \to e^x$ במטריקה האוקלידית. אבל $\frac{1}{n} \to 0$, וידוע שהגבול יחיד. לכן $e^x = 0$.
אין שום x שמקיים זאת.

הפרכה שניה: נקח את הקבוצה $X = \{\frac{1}{n}\}$ ונגדרי עליה שתי מטריקות: המטריקה האוקלידית והמטריקה הדיסקרטית. שתי המטריקות שקולות כי בשניהן מתקיים $x_n \to x$ אמ"ם הסדרה $\{x_n\}$ קבועה לבסוף על x. כעת, ידוע שכל מרחב עם המטריקה הדיסקרטית הוא מרחב שלם, כי סדרת קושי חייבת להיות סדרה קבועה לבסוף, ולכן היא מתכנסת. אולם במטריקה האוקלידית X אינו מרחב שלם, כי $\{\frac{1}{n}\}$ היא סדרת קושי בעצמה, שאינה מתכנסת בX.