תוספת לתרגיל 9 אלגברה לינארית

הגדרה:

יהיו V,W מ"ו. נביט באוסף כל ההעתקות הלינאריות $T:V\to W$. נגדיר עליו סכום באופן הבא $(T+S)(v):=Tv+Sv$, וכפל בסקלר $(aT)(v):=aTv$. קל לוודא שזהו מרחב וקטורי תחת הגדרות אלה, נסמן אותו ב $Hom(V,W)$ (קיצור להומומורפיזם).

1. מצא בסיס ומימד ל $Hom(V,W)$ בהנתן $E=\{v_1,...,v_n\}, E=\{w_1,...,w_m\}$ בסיסים ל V,W בהתאמה.
2. נניח ו- $\dim V=\dim W$ האם אוסף האיזומורפיזמים בינהם (העתקות לינארית חח"ע ועל) מהווה תת מרחב וקטורי של $Hom(V,W)$? האם תשובתך תשתנה אם $\dim V\neq\dim W$? הוכח.
3. יהיו $U=span\{(1,1,2,0),(0,-1,2,1),(1,1,0,0),(3,4,0,-1)\}$

$$W=span\left\{\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}\right\}$$

בכל אחד מהסעיפים בדוק האם קיימת העתקה לינארית $T:U\to W$ המקיימת את המשוואות הבאות, ואם כן מצא אחת כזו במפורש:

א.

$$T(1,1,2,0)=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$$
$$T(0,-1,2,1)=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$
$$T(1,1,0,0)=\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}$$
$$T(3,4,0,-1)=\begin{pmatrix}2&3\\3&8\end{pmatrix}$$

ב.

$$T(1,1,2,0)=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$$
$$T(0,-1,2,1)=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}$$
$$T(1,1,0,0)=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$$

4. מצא את הגרעין של ההעתקה/ות שמצאת בשאלה 3.