# שילוש + פולינום מינמאלי

24 במאי 2016

## שילוש

הגדרה: $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ ניתנת לשילוש אם היא צמודה למטריצה משולשית. כלומר קיימת $P$ הפיכה כך ש

$$P^{-1}AP=U$$

כאשר $U$ משולשית.

הערה: אופרטור $T:V\to V$ ניתן לשילוש אם $[T]_B^B$ ניתנת לשילוש עבור בסיס $B$ כלשהוא.

**משפט: $A$ ניתנת לשילוש אמ"מ הפ"א $p_A(\lambda)$ מל"ל.**

**אלגורתים לשילוש בניתן** $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$

1. חשב פ"א $p_A(\lambda)$, מצא ע"ע וו"ע. יהיו $v_!,\dots,v_k$ מספר מקס' של ו"ע בת"ל המתאימים לע"ע $\lambda_k,\dots,\lambda_1$. שים את הו"ע בעמודות מטריצה $P$ והשלם עוד עמודות כך ש $P$ מטריצה הפיכה (בפרט $C_i(P)=v_i$ לכל $1\le i\le k$).

2. חשב את

$$P^{-1}AP=\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda_1 & & 0 & \\ & \ddots & & M \\ 0 & & \lambda_k & \\ \hline & 0 & & B\end{array}\right)$$

3. שלש ברקורסיה את המטריצה $B$ בעזרת מטריצה $Q$. (כלומר $Q^{-1}BQ=U$ משולשית).

4. הגדר $\tilde{Q}=\begin{pmatrix} I_k & \\ & Q\end{pmatrix}$ ואז

$$\tilde{Q}^{-1}P^{-1}AP\tilde{Q}=\tilde{Q}^{-1}\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda_1 & & 0 & \\ & \ddots & & M \\ 0 & & \lambda_k & \\ \hline & 0 & & B\end{array}\right)\tilde{Q}=\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda_1 & & 0 & \\ & \ddots & & M \\ 0 & & \lambda_k & \\ \hline & 0 & & Q^{-1}BQ\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda_1 & & 0 & \\ & \ddots & & M \\ 0 & & \lambda_k & \\ \hline & 0 & & U\end{array}\right)$$

נדגים איך משלשים מטריצה: תהא

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

זוהי מטריצת מהצורה

$$A=\begin{pmatrix} B & 0 \\ & C \end{pmatrix}$$

ולכן נח

$$p_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\left|\begin{pmatrix} \lambda I-B & 0 \\ & \lambda I-C \end{pmatrix}\right|=|\lambda I-B|\,|\lambda I-C|$$

כעת,

$$\begin{aligned}|\lambda I-B| &= \left|\begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda-3 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda-2 \end{pmatrix}\right|=(\lambda-2)\left|\begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda-3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right|=(\lambda-2)\left|\begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 1 & \lambda-3 \end{pmatrix}\right| \\ &= (\lambda-2)\left[(\lambda-1)(\lambda-3)+1\right]=(\lambda-2)\left[\lambda^2-4\lambda+4\right]=(\lambda-2)^3\end{aligned}$$

ו

$$\begin{aligned}|\lambda I-C| &= \left|\begin{pmatrix} \lambda+2 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda+1 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix} \lambda+2 & -1 & \lambda+1 \\ 1 & \lambda+1 & \lambda+1 \\ 1 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix}\right|=(\lambda+1)\left|\begin{pmatrix} \lambda+2 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda+1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| \\ &= (\lambda+1)\left|\begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 & 1 \\ 0 & \lambda+1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right|=(\lambda+1)^3\end{aligned}$$

ובסה"כ

$$p_A(\lambda)=(\lambda+1)^3(\lambda-2)^3$$

נמצא ו"ע:

עבור $\lambda=2$ נקבל

$$A-2I=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -12 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & -12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ומכאן ש

$$V_{\lambda=2} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ s \\ s \\ s \\ s \end{pmatrix} \,:\, s,t \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

עבור $\lambda = -1$ נקבל

$$A + I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 6 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 6 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 6 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&6&0&0&0\\ 0&0&6&-2&2&0\\ 0&0&6&-2&0&2\\ 0&0&6&-2&0&2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&-2&2&0\\ 0&0&0&-2&0&2\\ 0&0&0&-2&0&2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&-2&2&0\\ 0&0&0&0&-2&2\\ 0&0&0&0&-2&2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&-1&0\\ 0&0&0&0&1&-1\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&-1&0\\ 0&0&0&0&1&-1\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&-1\\ 0&0&0&0&1&-1\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

ומכאן ש

$$V_{\lambda=-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\t\\t\\t \end{pmatrix} \,:\, t \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1\\1\\1 \end{pmatrix} \right\}$$

נשים את הו"ע ב־3 עמדות של מטריצה $P$ ונשלים את שאר העמודות כך ש $P$ תהיה הפיכה. למשל

$$P = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0\\ 0&1&1&0&1&0\\ 0&1&1&0&0&1 \end{pmatrix}$$

ואז

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&-1&1&0&0\\ -1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&-1&1&0\\ 0&0&0&-1&0&1 \end{pmatrix}$$

מחישוב ישיר, נקבל כי

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \mathbf{2}&0&0&1&0&0\\ 0&\mathbf{2}&0&1&0&0\\ 0&0&-\mathbf{1}&0&1&0\\ 0&0&0&2&0&0\\ 0&0&0&0&-2&1\\ 0&0&0&0&-1&0 \end{pmatrix}$$

מנמשיך באותו אופן עם המטריצה $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. כיוון שלמטריצות צמודות אותו פולינום אופיני נקבל כי

$$(\lambda-2)^2(\lambda+1)\cdot p_B(\lambda)=p_A(\lambda)=(\lambda-2)^3(\lambda+1)^3$$

ולכן

$$p_B(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda+1)^2$$

נמצא ו"ע: עבור $\lambda=-1$

$$B+I \quad = \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ומכאן ש

$$V_{\lambda=-1}=\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix}\ :\ s,t\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

עבור $\lambda=2$

$$B-2I \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

ומכאן ש

$$V_{\lambda=2}=\left\{\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ :\ s,t\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

נשים את הו"ע בעמודות מטריצה $Q$ ונשלים עמודה על מנת ש $Q$ תהיה הפיכה. נגדיר

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ואז

$$Q^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ובחישוב ישיר

$$Q^{-1}BQ=\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

משלושית.

הערה: שימו לב שאם יש 2 ו"ע למטריצה 3 על 3 - אין צורך בשלב נוסף.

נגדיר

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} I_3 & \\ & Q \end{pmatrix}$$

ואז

$$\tilde{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} I_3 & \\ & Q^{-1} \end{pmatrix}$$

נחבר הכל ביחד ונקבל

$$\tilde{Q}^{-1}P^{-1}AP\tilde{Q} = \begin{pmatrix} I_3 & \\ & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_3 & \\ & Q \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & Q^{-1}BQ & \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

## פולינום מינימאלי

הגדרה: תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. פולינום $m_A(\lambda) \in \mathbb{F}[x]$ יקרא הפולינום המינימאלי של $A$ אם

1. מתקיים כי $m_A(A) = 0$
2. הוא הפולינום עם דרגה מינימאלית המקיים זאת
3. הפלינום מתוקן (כלומר המקדם של החזקה הגבוה ביותר =1)

דוגמא: הפ"מ של $I$ הוא $\lambda - 1$, הפ"מ של 0 הוא $\lambda$

משפט: הפ"מ מחלק כל פולינום המאפס את $A$ . בפרט הפ"מ מחלק את הפ"א. יתר על כן, לפ"מ ול"א יש אותם גורמים אי פריקים.

למשל: עבור המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 2 & & \\ & & & & & 2 & 1 \\ & & & & & & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{7\times 7}$$

מתקיים כי $p_A(\lambda) = \left(\lambda^2+1\right)(\lambda-1)^2(\lambda-2)^3$ ולכן הפמ הוא מהצורה

$$m_A(\lambda) = \left(\lambda^2+1\right)(\lambda-1)^s(\lambda-2)^t \quad 1 \le s \le 2,\ 1 \le t \le 3$$

ניתן לבדוק את כל האפשרויות ולקלות כי במקרה שלנו

$$m_A(\lambda) = \left(\lambda^2+1\right)(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$$

משפט: מטריצה לכסינה אמ"מ הפ"א מהצורה $\prod_{i=1}^{m}(\lambda-\lambda_i)$ כאשר $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ ע"ע שונים.
תרגיל: תהא $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ הפיכה כך ש $\left(A^3+A\right)(A-2I)=0$ ומקיימת כי $tr(A)=2$. מצא פ"מ ופ"א
פתרון מהנתון הקבל כי הפולינום $g(x) = \left(\lambda^3+\lambda\right)(\lambda-2) = \lambda\left(\lambda^2+1\right)(\lambda-2)$ מאפס את $A$ ולכן הפ"מ מחלק אותו. מכאן ש

$$m_A(\lambda) \in \left\{\lambda\left(\lambda^2+1\right)(\lambda-2), \left(\lambda^2+1\right)(\lambda-2), \lambda(\lambda-2), \lambda\left(\lambda^2+1\right), \lambda\left(\lambda^2+1\right), \lambda^2+1, (\lambda-2), \lambda\right\}$$

כיוון ש $A$ הפיכה, אין לה ע"ע 0 ולכן אין גורם $\lambda$.נמשיך:
ההפוילנום $(\lambda-2)$ לא יכול להיות כי זה סותר את $tr(A)=2$
הפולינום $\lambda^2+1$ לא יכול להיות כי אז $A^2+I=0$ מה שגורר $A^2=-I$. אם נוציא דט' נקבל כי $|A|^2=-1$ מה שלא יכול להיות.
לכן $m_A(\lambda) = \left(\lambda^2+1\right)(\lambda-2)$. בתור מטריצה מרוכבת יש לה רק את הע"ע $\pm i, 2$. כיוון שהסכום שלהם =2 אזי יש לה רק ע"ע בודד ששווה 2 ($tr(A)$ שווה סכום הע"ע המרוכבים שלה)
ולכן $p_A(A) = \left(\lambda^2+1\right)^3(\lambda-2)$ (כי החזקה צריכה להיות 7)