תרגיל 11

1. א. בקבוצה $\{2,3,4,...,999,1000\}$ הסדורה חלקית לפי $|$ (מחלק ללא שארית) ישנם בדיוק 500 איברים מקסימליים מהם?
ב. רשום לפחות 10 איברים מינימליים בקבוצה סדורה זו.
ג. האם יש בקס"ח זו איבר קטן ביותר או איבר גדול ביותר? אם אין הוסף 2 מספרים לקבוצה שימלאו תפקידים אלו. מה יהיו האיברים המינימליים והמקסימליים בקס"ח המורחבת?

פתרון:
א. כל האיברים בין 501 ל־ 1000 אינם מחלקים אף מספר בקבוצה ולכן מקסימליים, לכל שאר האיברים קיים בקבוצה איבר שהוא פי שניין מהם לכן הם מחלקים אותו ואינם מקסימלים.
ב. צריך פשוט לבחור מספרים ראשוניים שכמובן לא מתחלקים באף מספר. $\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,...\}$.
ג. אין איבר קטן ביותר וגם אין איבר גדול ביותר. אם היה אז הוא היה המקסימלי\מינימלי יחיד, והראנו שיש הרבה מקסימליים\מינימליים.
אם נוסיף את 1 הוא יהיה מינימום ו־$1000! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot 999\cdot 1000$ יהיה מקסימום כי כל איבר מחלק אותו. (אפשר למצוא מקסימום קטן יותר שהוא בדיוק הכפולה המשותפת המינימלית).

2. תהי A קבוצה ויהי R יחס סדר חלקי על A.
א. נגדיר את היחס ההופכי של R על A בצורה הבאה: $R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b)\in R\}$.
הוכיחו כי R^{-1}יחס סדר חלקי.
ב. תהי $B\subseteq A$ נגדיר $S = R\cap(B\times B)$ הוכיחו כי S הוא יחס סדר על B.
פתרון:
א.
רפלקסיביות: לכל $a\in A$ $(a,a)\in R$ ולפי הגדרת R^{-1} מתקיים $(a,a)\in R^{-1}$.
אנטי סימטרי: צ"ל $(a,b),(b,a)\in R^{-1}\longrightarrow a=b$
נניח כי $(a,b),(b,a)\in R^{-1}$ אז $(b,a),(a,b)\in R$ אבל R יחס סדר חלקי ולכן אנטי סימטרי לכן בהכרח $a=b$.
טרנזטיבי: $(a,b),(b,c)\in R^{-1}\longrightarrow(a,c)\in R^{-1}$.
נניח כי $(a,b),(b,c)\in R^{-1}$ אזי $(b,a),(c,b)\in R$ אבל R טרנזיטיבי (כי הוא יחס סדר) ולכן $(c,a)\in R$ ולכן $(a,c)\in R^{-1}$.
ב.
רפלקסיבי: לכל $b\in B$ מתקיים $b\in A$ כי $B\subseteq A$, ולכן $(b,b)\in R$ (כי R רפלקסיבי

כיחס מעל A). כמובן שמתקיים $(b,b) \in B \times B$ ולכן $(b,b) \in R \cap B \times B = S$.
אנטי סימטרי: נניח כי $(a,b),(b,a) \in S = R \cap B \times B$ אזי $(a,b),(b,a) \in R$ ולכן $a = b$ כי R אנטי סימטרי.
טרנזטיביות: נניח כי $(a,b),(b,c) \in S = R \cap B \times B$ אזי $(a,b),(b,c) \in R$ וגם $(a,b),(b,c) \in B \times B$ (מהגדרה של S כחיתוך של R עם $B \times B$)
$(a,b),(b,c) \in R$ לכן ניתן להסיק כי $(a,c) \in R$ כי R טרנזטיבי.
$(a,b),(b,c) \in B \times B$ לכן ניתן להסיק כי $(a,c) \in B \times B$ (כי מהגדרת מכפלה קרטזית בהכרח $a,b,c \in B$).
ולכן בסה"כ $(a,c) \in R \cap B \times B$.

3. הוכח או הפרך:
א. A קבוצה R יחס סדר חלקי מעל A, אם $a \in A$ איבר מינימלי יחיד אזי a הוא איבר קטן ביותר (מינימום) ב־A?
ב. A קבוצה סופית, R יחס סדר חלקי מעל A. אם $a \in A$ איבר מינימלי יחיד אזי a הוא איבר קטן ביותר (מינימום) ב־A?

פתרון:
א. דוגמה נגדית נגדיר יחס R מעל $A = \mathbb{Z} \cup \{\{1\}\}$, בצורה הבאה aRb אם"ם $a,b \in \mathbb{Z} \wedge a \leq b$ או $a = b = \{1\}$.
צ"ל שזה יחס סדר חלקי:
רפלקסיביות: לכל $a \in A$ אם $a = \{1\}$ אזי לפי ההגדרה aRa וכן אם $a \in \mathbb{Z}$ גם כן מתקיים aRa.
אנטי סמטריות: אם $(a,b),(b,a) \in R$ אזי אם $a = \{1\}$ אזי לפי ההגדרה $a = b$.
אם $a \in \mathbb{Z}$ אזי בהכרח לפי הגדרת היחס גם $b \in \mathbb{Z}$ ואם $a \leq b \wedge b \leq a$ בהכרח $a = b$.
טרנזטיביות: אם $(a,b),(b,c) \in R$ אזי אם $a = \{1\}$ אזי לפי ההגדרה $a = b = c$ וכמובן $(a,c) = (a,a) \in R$. אם $a \in \mathbb{Z}$ אזי בהכרח לפי הגדרת היחס גם $b \in \mathbb{Z}$ וגם $c \in \mathbb{Z}$ ומתקיים $a \leq b \leq c$ ובפרט $(a,c) \in R$.
$\{1\}$ הוא איבר מינימלי בקבוצה כי פרט לעצמו אף איבר לא ניתן להשוואה עימו, אין עוד מינימלי כי לכל $a \in \mathbb{Z} : a - 1 < a$, והוא לא הקטן ביותר כי אף איבר לא ניתן להשוואה עימו.
ב. נניח ש־a מינימלי יחיד נוכיח ש־a מינימום:
נסמן $B = \{b \in A \mid (a,b) \notin R\} \subseteq A$,
אם B ריקה אזי a קטן ביותר, וסיימנו. (נימוק אם B ריקה זה אומר לכל $b \in A$ מתקיים $(a,b) \in R$ שזה בדיוק הגדרת איבר קטן ביותר)
אם B אינה ריקה אזי בהכרח קיים בה איבר מינימלי נסמנו ב־b. (זה משפט שלא קשה להוכיח, בקבוצה סופית קיים איבר מינימלי ואיבר מקסימלי).
b מינימלי גם ב־A נימוק: לכל $x \in A$ $x \neq b$ אם $x \in B$ אזי $(x,b) \notin R$ (כי b מינימלי).
ואם $x \notin B$ אזי $(a,x) \in R$ ואם $(x,b) \in R$ מטרנזיטביות נקבל ש־$(a,b) \in R$ סתירה ל־$b \in B$ ולכן $(x,b) \notin R$.
לכן bגם כן מינימלי בסתירה להיות a מינימלי יחיד, ולכן בהכרח B ריקה ו־a מינימום.

4. האם הקבוצות הבאות איזומורפיות? נמקו!
א. $(\mathbb{Z}^- = \{-1,-2,\ldots\}, \geq), (\mathbb{N}, \leq)$.
ב. $(\mathbb{Z}^-, \leq), (\mathbb{N}, \leq)$.
ג. $(\mathbb{N}, \leq), (\mathbb{N} \cup \{0\}, \leq)$.

ד. $(\mathbb{R},\leq),(\mathbb{Q},\leq)$.
ה. תהי $A\subseteq\mathbb{N}$ קבוצה של מספרים טבעיים. $(A,\leq),(P(A),\subseteq)$.
פתרון:
א. כן. נגדיר $f:\mathbb{Z}^-\to\mathbb{N}$ ע"י $f(a)=-a$. חח"ע ועל כי היא ההופכית של עצמה. שומרת סדר: יהיו $a,b\in\mathbb{Z}^-$ אכן מתקיים: $f(a)=-a\leq -b=f(b) \iff a\geq b$.
ב. לא. בטבעיים יש קטן ביותר מה שאין בשלמים השליליים, ולהיפך מבחינת גדול ביותר (דיאגרמות הסה הפוכות). לכן אם הייתה $f:\mathbb{Z}^-\to\mathbb{N}$ חח"ע, על ושומרת סדר, נתבונן ב $f^{-1}(1)$, ונשים לב שמתקיים $f^{-1}(1)-1<f^{-1}(1)$, ואז בחזרה היה אמור להיות ש־$f\left(f^{-1}(1)-1\right)<f\left(f^{-1}(1)\right)=1$ אבל אין מספר טבעי קטן מ־1.
ג. כן. קל לראות שהפונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\cup\{0\}$ המוגדרת ע"י $f(n)=n-1$ חח"ע ועל (ההופכית היא זו שמוספיה 1), ושמורת סדר: יהיו $a,b\in\mathbb{N}$ אזי כמובן ש $f(a)=a-1\leq b-1=f(b) \iff a\leq b$.
ד. לא. אם לא למדתם בהרצאה על עוצמות שאין פונקציה חח"ע ועל בין הקבוצות, אז תאלצו להאמין לי...
ה. עבור קבוצה סופית A ראינו שאין שיוויון בעוצמות, ולכן אין פונקציה חח"ע ועל. אם A אינסופית, אז יש בה לפחות שני איברים שונים, נסמנם a,b, ונתבונן בתתי הקבוצות $\{a\},\{b\}$. נניח בשלילה שיש איזומורפיזם $f:P(A)\to A$. נסמן $n=f(\{a\}),m=f(\{b\})$. כעת ממלאות היחס $\leq$ נקבל ש $n\leq m\vee m\leq n$ אבל $f^{-1}(n)=\{a\}\not\subseteq\{b\}=f^{-1}(m)\wedge f^{-1}(m)=\{b\}\not\subseteq\{a\}=f^{-1}(n)$.