אפרוקסימציה - המשך

שיטת הLeast Squares - תזכורת+המשך

נתונה פונקציה f, וצריך לקרב אותה לפולינום מדרגה על n:

$$f\left(x\right)\approx p_{n}\left(x\right)=a_{0}+a_{1}x+\cdots+a_{n}x^{n}$$

כך שעבור אינטרוול נתון $[a,b]$,

$$F\left(a_{0},a_{1},\ldots a_{n}\right)\equiv\int_{a}^{b}\left[f\left(x\right)-\sum_{j=0}^{1}a_{j}x^{j}\right]^{2}\mathrm{d}x$$

יהיה מינימלי. בשביל זה צריך שלכל $i=0,1,\ldots n$, $\frac{\partial F}{\partial a_{i}}=0$.
במקום לבצע אינטגרל ואז נגזרת, מחליפים את הסדר:

$$0=\int_{a}^{b}\frac{\partial}{\partial a_{j}}\left[f\left(x\right)-\sum a_{j}x^{j}\right]^{2}\mathrm{d}x\qquad i=0,1,\ldots n$$

$$0=\cancel{2}\int_{a}^{b}\left(F\left(x\right)-\sum a_{j}x^{j}\right)\cancel{(-1)}x^{i}\,\mathrm{d}x$$

ובסוף מקבלים

$$\sum_{j=0}^{n}a_{j}\int_{a}^{b}x^{i+j}\,\mathrm{d}x=\int_{a}^{b}f\left(x\right)x^{i}\,\mathrm{d}x\qquad i=0,1,\ldots n$$

זו מערכת משוואות לינארית ב$(n+1)$ נעלמים - והבעיה היא שהמערכת לא יציבה(ill conditioned)!
למשל עבור אינטרוול $[0,1]$ מקבלים

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{a_{j}}{i+j+1}=\int_{0}^{1}f\left(x\right)x^{j}\,\mathrm{d}x\qquad i=0,1,\ldots n$$

אגף ימין קבוע, המשתנים(=המקדמים a_i) נמצאים באגף שמאל, ומטריצת המערכת היא

$$\begin{array}{c}i=0\\ i=1\\ \vdots\\ i=n\end{array}\left]\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \cdots & \frac{1}{2n}\end{pmatrix}\right.\begin{pmatrix}a_{0}\\ a_{1}\\ \vdots\\ a_{n}\end{pmatrix}$$

הידועה לשמצה בשל הconditional number שלה - 27 עבור 2×2, 748 עבור 3×3.

גישה אלטרנטיבית - אפרוקסימציה המתבססת על פולינומים אורטוגונליים

הרעיון: במקום לעבוד עם בסיס של חדי־איבר x^n $(n \geq 0)$(שקרובים לתלות לינארית), נעבוד עם בסיס של פולינומים אורטוגונליים.

הגדרות:
- מכפלה פנימית של שתי פונקציות רציפות ב$[a,b]$ נתונה ע"י

$$\langle f,g\rangle \triangleq \int_a^b f\left(x\right)g\left(x\right)\,\mathrm{d}x$$

- הנורמה לפי המכפלה הפנימית הזו היא

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b f^2\left(x\right)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} = \sqrt{\langle f,f\rangle}$$

- f וg יחשבו אורטוגונליים אם $\langle f,g\rangle = 0$

פולינומי צ'ביצ'ב

הפולינומים מתקבלים ע"י נוסחת הנסיגה

$$T_{n+1}\left(x\right) = 2xT_n\left(x\right) - T_{n-1}\left(x\right)$$

$$T_0\left(x\right) \equiv 1 \qquad T_1\left(x\right) = x$$

כלומר:

$$\begin{aligned} T_0 &= 1 \\ T_1 &= x \\ T_2 &= 2x^2-1 \\ T_3 &= 4x^3-3x \end{aligned}$$

וכו'

תכונות של פולינומי צ'ביצ'ב

- ניתן להראות ש$T_n\left(x\right) = \cos n\theta$ כאשר $\theta = \cos^{-1} x$[1]

  $[\cos\theta = \cos\left(\arccos x\right) = x]$

  באופן כללי:

$$\cos\left(n+1\right)\theta + \cos\left(n-1\right)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta$$

[1] $\cos^{-1}$ זה בעצם $\arccos$(ולא $\frac{1}{\cos}$)

נובע אכן

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$$

- לפולינומי צ'ביצ'ב מקדם 2^{n-1}(עבור חד האיבר x^n)
- פולינומי צ'ביצ'ב <u>אורטוגונליים</u>! ספציפית,

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)\,T_n(x)}{\sqrt{1-x^n}}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n = 0 \\ \pi/2 & m = n \neq 0 \end{cases}$$

סוף החומר של הקורס

על הבחינה

- מועד א' מתקיים ב11־07־2012
- הבחינה 3 שעות
- 5 שאלות
- להביא מחשבון ־ שלא יודע לעשות plot, להפוך מטריצות, לפתור משוואות וכו'.
- מותר להכניס דף(=שני עמודים) אחד של נוסחאות.
- חומר:
  - סוגי שגיאות
  - ייצוג מספרים
  - שיטות למציאת שורשים
  - התכנסות ־ סדר התכנסות, שיעור התכנסות וכו'
  - אלימינציה לפי גאוס
  - סיכוביות של השיטות השונות
  - Pivoting
  - אינטרפולציה
    - * הוספה, גריעה של נקודות
  - אפרוקסימציה
    - * שיטת טור טיילור
      - · מציאת חסם עליון
    - * שיטת Least Squares
    - * שיטת minimax(רק ברמה שלמדנו)
    - * שיטת פולינומי צ'ביצ'ב
  - אינטגרציה נומרית
  - **שאלה על Spline ־ מובטחת!**
- לא נידרש לכתוב קוד Matlab ־ אבל אולי נידרש לכתוב פאסודו־קוד, לתאר אלגוריתם.
- לעגל חישובי ביניים לפי הדיוק הנדרש(מספר הספרות המשמעותיות)
- יהיו גם שאלות תיאורתיות וגם שאלות חישוב
  - ניצול של משפטים תיאורתיים ־ צריך לדעת את המשפטים