שיטות למציאת שורש מרובה

x_0 שורש מרובה של הפונקציה מסדר m אם

$$f(x_0)=f'(x_0)=\dots=f^{(m-1)}(x_0)=0$$
$$f^{(m)}(x_0)\neq 0$$

שיטת ניוטון רפסון (משופרת)

1. אם ידוע הסדר של השורש המרובה:

שורש מרובה מסדר k נבצע את האיטרציות:

$$x_{n+1}=x_n-k\cdot\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

2. אם לא ידוע סדר השורש המרובה: נגדיר $h(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$,

במקרה זה אם ל-f שורש מרובה ב-x_0 אז ל-h שורש פשוט ב-x_0. ולכן נבצע:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{h(x_n)}{h'(x_n)}$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f'(x_n)\cdot f(x_n)}{(f'(x_n))^2-f(x_n)\cdot f''(x_n)}$$

חיסרון: צריך לחשב נגזרת שנייה.

יתרון: לא צריכים לדעת מה סדר השורש.

דוגמא א: נתונה הפונקציה $f(x)=e^x-x-1$

(א) הראה שיש ל-f שורש מרובה מסדר שני בנקודה $=0$

(ב) הראה שבשיטת ניוטון רפסון המקורית מתכנסת לאט יותר לשורש זה משיטת ניוטון המשופרת (במקרה של שורש מרובה). עד שמגיעה מוחלטת של $|x_n-p|<10^{-5}$

פתרון:

(א)

$$f(0)=1-0-1=\boxed{0}$$
$$f'(x)=e^x-1\big|_{x=0}=0$$
$$f''(x)=e^x\big|_{x=0}=1\neq 0$$

שורש מרובה מסדר שני.

סעי' ב) איטרציות ניוטון רפסון (״הרגילה״):

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{e^{x_n}-x_n-1}{e^{x_n}-1}$$

$$x_0=1$$

$$x_1=1-\frac{e-1-1}{e-1}=0.58198$$

$$x_2=0.58198-\frac{e^{x_1}-x_1-1}{e^{x_1}-1}=0.31906$$

ונקבל:

n	x_n (רגילה)	x_n (משופרת)
0	1	1
1	0.58	$-2.34\cdot10^{-1}$
2	0.32	$-8.45\cdot10^{-3}$
3	0.17	$-1.189\cdot10^{-5}$
4	0.09	$\boxed{-6.86\cdot10^{-6}}$
6	⋮	
⋮	⋮	
16	$1.91\cdot10^{-6}$	

שיטת ניוטון רפסון משופרת עבור שורש מרובה מסדר 2:

(ב)
$$x_{n+1}=x_n-2\cdot\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=$$

$$=x_n-2\cdot\frac{e^{x_n}-x_n-1}{e^{x_n}-1}=1-2\cdot\frac{e-2}{e-1}$$

$$x_1=0.1639$$

$$x_2=4.4\cdot10^{-3}$$

$$x_3=3.34\cdot10^{-6}$$

תרגיל: עבור המשוואה $f(x)=x^3+3x^2-2$

חשבו את פתרונות המשוואה $f(x)=0$

ומצאו את סדר ההתכנסות בשיטת N-R.

תזכורת: עבור שורש מסדר K, סדר ההתכנסות לשורש הוא K.

פתרון: ניתן לראות ש- $\alpha_1=-1$ הוא שורש של הפונקציה ולכן:

$$f(x)=(x+1)(x^2+2x-2)$$

$$\boxed{(x+1)(x^2+2x-2)}$$
$$\shortparallel$$
$$x^3+3x^2-2$$

$$\boxed{\alpha_1=-1}$$

$$\alpha_{2,3}=\frac{-2\pm\sqrt{4+8}}{2}=\begin{matrix}0.732=\alpha_2\\ \boxed{-2.732=\alpha_3}\end{matrix}$$

נבדוק מהם נגזרות האיטרציה:

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}=x-\frac{x^3+3x^2-2}{3x^2+6x}$$

שיטת נקודת שבת

$$f(x)=0$$
$$\Downarrow$$
$$g(x)=x$$

נאמר כי סדר ההתכנסות הוא p עבור g

$$\begin{cases} g'(x_0)=\_\_\_=g^{(p-1)}(x_0)=0 \\ g^{(p)}(x_0)\neq 0 \end{cases}$$

המשך התרגיל:

$$\varphi'(x)=1-\frac{(3x^2+6x)(3x^2+6x)-(6x+6)(x^3+3x^2-2)}{(3x^2+6x)^2}=$$

$$=\_\_\_=(6x+6)\cdot\frac{x^3+3x^2-2}{(3x^2+6x)^2}$$

$$\varphi'(\alpha_1)=0$$
$$\varphi'(\alpha_2)=0$$
$$\varphi'(\alpha_3)=0$$

$$\varphi''(x)=\frac{4(x+1)(x^2+2x+4)}{3x^3(x+2)^3}$$

$$\varphi''(\alpha_1)=0\ ,\ \varphi''(\alpha_2),\varphi''(\alpha_3)\neq 0$$

כנ"ל α_3, α_2 שורשים מסדר 2.
α_1 – שורש מסדר 3 (נסה האיטרציות),
ולכן סדר ההתכנסות בשיטת N-R
הוא 2 עבור שורשים α_2, α_3
ו-3 עבור השורש α_1.

שיטת מולר

השיטה מתבססת על שיטת המיתר, רק שבמקום 2 נקודות בוחרים 3, מעבירים דרכן פרבולה והניחוש הבא הוא נק' החיתוך של הפרבולה עם ציר ה-X.

סדר ההתכנסות – 1.84.

בהינתן 3 נק' נמצא את a,b,c עבורן:

$$p(x) = \underline{a}(x-x_2)^2 + \underline{b}(x-x_2) + \underline{c}$$

$$x_3 = x_2 + \frac{2c}{b + \text{sign}(b)\cdot\sqrt{b^2-4ac}}$$

חסרונות: השיטה לא תמיד מתכנסת.

יתרונות: ההתכנסות מהירה 1.84

-לא צריך לחשב נגזרת.

נורמות

נורמה של וקטור: $\|X\|_t = \sqrt[t]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^t}$

נורמה וקלידית – $t=2$

מרחק מנהטן – $t=1$

נורמה אינסוף – $\|X\|_\infty = \max|x_i|$

תרגיל: עבור הוקטור $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ מצא:

א) $\|V\|_2$, $\|V\|_1$, $\|V\|_\infty$

ב) הוכח שהתנאי מתקיים $\|V\|_\infty \le \|V\|_2 \le \sqrt{n}\cdot\|V\|_\infty$

פתרון: א)

$\|V\|_1 = 1+2+3+4 = 10$

$\|V\|_\infty = 4$

$\|V\|_2 = \sqrt{1+4+9+16} = \sqrt{30}$

$$(\|V\|_\infty)^2 = MAX(V_i)^2 \le \sum_{i=1}^{n} |V_i|^2 = (\|V\|_2)^2$$ ב הוכ׳

כיוון שהנורמה חיובית:

$$\Rightarrow \|V\|_\infty \le \|V\|_2$$

$$(\|V\|_2)^2 = \sum_{i=1}^{n} |V_i|^2 \le n \cdot MAX|V_i|^2 = n\cdot(\|V_\infty\|)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\|V\|_2 \le \sqrt{n}\cdot\|V\|_\infty}$$

נורמה של מטריצה:

הנורמה המושרית:

$$\|A\|_t = \max_{\|x\|_t > 0} \frac{\|Ax\|_t}{\|x\|_t}$$

נורמת פרוביניאס:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^2}$$

$$\|A_1\| = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$ ⇐ סכום מקסימלי של עמודה

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$ ⇐ סכום מקסימלי של שורה

תרגיל: עבור המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & 1/4 \\ -8 & 6 & 5.2 \end{pmatrix}$$

תחשבו $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$.

פתרון:

$$\|A\|_1 = (11, 6, 10.45) = 11$$

$$\|A\|_\infty = (6, 2\tfrac{1}{4}, 19.2) = 19.2$$

רדיוס ספקטרלי:

$$\rho(A) = MAX|\lambda_i|$$

הנורמה ה-2 של A / הנורמה הספקטרלית:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T\cdot A)}$$

בס"ד

דוגמא: למצוא את $\|A\|_2$ עבור $A=\begin{pmatrix}1&-2\\1&2\end{pmatrix}$

$$A^T=\begin{pmatrix}1&1\\-2&2\end{pmatrix}$$

$$A^T\cdot A=\begin{pmatrix}1&1\\-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&8\end{pmatrix}\Rightarrow\lambda_i=2,8$$

$$\rho(A^T\cdot A)=8$$

$$\|A\|_2=\sqrt{\rho(A^T\cdot A)}=\boxed{\sqrt{8}}$$

דוגמא: הראה כי לכל נורמה מושרית מתקיים: $\|B\|\geq\rho(B)$

פתרון: תזכורת:

$$\|B\|=MAX\frac{\|Bv\|}{\|v\|}$$

נסמן את הע"ע המקסימלי של B,
ו-v הו"ע המתאים:

$$\|B\|\cdot\|v\|\geq\|Bv\|=\|\lambda v\|=\|v\lambda\|=\underbrace{|\lambda|}\cdot\|v\|=\|v\|\cdot\underbrace{\rho(B)}$$

$$\Rightarrow\boxed{\|B\|\geq\rho(B)}$$

דוגמא: נניח ש- $S=S^T$. מה ניתן לומר על $\|S\|_2,\|S\|_\infty,\|S\|_1$?

פתרון: כיוון שהמטריצה סימטרית סכום השורות וסכום העמודות
יהיה זהה: $\|S\|_1=\|S\|_\infty$.

כלומר, אם λ ע"ע של S אז λ^2 ע"ע של S^2

$$\|S\|_2=\sqrt{\rho(S^T\cdot S)}=\sqrt{\rho(S^2)}=\sqrt{\rho^2(S)}=\boxed{\rho(S)}$$

דירוג מטריצה-תיבות

תרגיל: נתונה המשוואה $\vec{A}\cdot\vec{x}=\vec{b}$ כאשר

$$A=\begin{pmatrix}1&3&2\\3&5&4\\2&-3&6\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}5\\10\\2\end{pmatrix}$$

מצא את x.

פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&2&5\\3&5&4&10\\2&-3&6&2\end{array}\right)\xrightarrow[R_3-2R_1\to R_3]{R_2-3R_1\to R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&2&5\\0&-4&-2&-5\\0&-9&2&-8\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-\frac{9}{4}R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&2&5\\0&-4&-2&-5\\0&0&6.5&3.25\end{array}\right)$$

$$6.5x_3=3.25 \Rightarrow x_3=1/2$$
$$-4x_2-1=-5 \Rightarrow x_2=1$$
$$x_1+3+1=5 \Rightarrow x_1=1$$
$$\Rightarrow x=\begin{pmatrix}1\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

מספר מצב של מטריצה

עבור מערכת משוואות לינאריות, מספר מצב של המטריצה A מבטא
את השגיאה בפתרון (x) ביחס לשגיאה בקלט (A,b)
מספר מצב של מטריצה מוגדר להיות

$$cond(A)=kapa(A)=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|$$

במקרה שבו $cond(A)>>1$ ill-condition

אחרת - well-condition

דוגמא:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 10\\ 10 & 101\end{pmatrix} \Rightarrow \|A\|_1 = 111$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}101 & -10\\ -10 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \|A^{-1}\| = 111$$

$$Kapa(A) = 111\cdot 111 = 12{,}321 \gg 1$$

<u>נתבונן במערכת:</u>

$$A=\begin{pmatrix}1 & 10\\ 10 & 101\end{pmatrix}$$

$$b=\begin{pmatrix}11\\ 111\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 10\\ 10 & 101\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\\ 111\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

נניח כי b התקבל עם שגיאה, כלומר $b=\begin{pmatrix}11\\ 111.1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1 & 10\\ 10 & 101\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\\ 111.1\end{pmatrix}$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1.1 \Rightarrow \begin{pmatrix}0\\ 1.1\end{pmatrix}$$