תרגול 13 - חזרה

30 באוגוסט 2020

1. תרגיל על עקרון המקסימום של האוסדורף או אקסיומת הבחירה: קבוצה $X \subseteq \mathbb{R}$ תיקרא מגניבה אם:

$$\forall x, y \in X : x \neq y \Rightarrow x - y \notin \mathbb{Q}$$

הוכיחו שקיימת קבוצה מגניבה מקסימלית (ביחס להכלה).

פתרון: נסמן ב- $\mathcal{F}$ את אוסף המגניבות. אנחנו להוכיח שיש איבר מקסימלי בקס"ח $(\mathcal{F}, \subseteq)$.

דרך 1: בעזרת אקסיומת הבחירה. האקסיומה אומרת שבהינתן אוסף של קבוצות $\mathcal{F}$ נגדיר $A = \bigcup\limits_{X \in \mathcal{F}} X$ אז יש פונקצית בחירה $\varphi : \mathcal{F} \to A$ כך שלכל $X \in \mathcal{F}$ מתקיים $\varphi(X) \in X$.

נרצה כעת להגדיר יחס שקילות על $\mathbb{R}$ כך שבחירת נציג מכל מחלקת שקילות (בעזרת פונקציית בחירה) תיתן לנו קבוצה מגניבה מקסימלית. נגדיר את היחס $\sim$ ע"י:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

זהו יחס שקילות (ראינו בתרגול על יחסי שקילות יחס דומה מאד, ראו שם הוכחה).

כעת, ידוע לנו שיש פונקציית בחירה $\varphi : \mathbb{R}/\sim \to \mathbb{R}$ כך שלכל $[x] \in \mathbb{R}/\sim$ מתקיים: $\varphi([x]) \in [x]$.

טענה: הקבוצה $Im(\varphi)$ היא קבוצה מגניבה מקסימלית.

הוכחת מגניבות: יהיו $x, y \in Im(\varphi)$ ונניח $x \neq y$. מחד ערכיות של פונקציית הבחירה יש להם שני מקורות שונים. כלומר, קיימים $[a] \neq [b] \in \mathbb{R}/\sim$ כך ש- $\varphi([a]) = x, \varphi([b]) = y$. מהגדרת הפונקצייה נקבל $x \in [a], y \in [b]$, וכיון שאלו מחלקות שקילות שונות, נקבל $x \not\sim y$ כלומר, $x - y \notin \mathbb{Q}$.

הוכחת מקסימליות: נב"ש שיש $B \supset Im(\varphi)$ מגניבה. נקבל שיש $b \in B \setminus Im(\varphi)$. נתבונן ב- $x = \varphi([b])$, $x \neq b$ כי $x \in Im(\varphi)$. מהגדרת φ מתקיים $x \in [b]$ כי היא פונקציית בחירה. לכן $x - b \in \mathbb{Q}$ ו-B לא מגניבה בסתירה.

2.

(א) תהא A קבוצה. מצאו פונקציה חח"ע $f : A \to A^A$.

פתרון: נגדיר $f(a) = \{(b,a) : b \in A\}$ כלומר, a נשלח לפונקצייה הקבועה ששולחת את כולם ל־ a. שימו לב שאם A ריקה אז f היא הפונקצייה הריקה.
קל לראות שזו חח"ע, כי אם $a \neq b \in A$ אז $f(a) = \{(c,a) : c \in A\} \neq \{(c,b) : c \in A\} = f(b)$.

(ב) תהא A קבוצה לא ריקה. מצאו פונקציה על $f : A^A \to A$. למה בסעיף א אפשרי ש־A תהיה ריקה?

קיים $a \in A$. נגדיר $f : A^A \to A$ המוגדרת ע"י $f(g) = g(a)$. זו על כי לכל $b \in A$ יש את הפונקציה $g : A \to A$ המוגדרת ע"י $g(x) = b$ (הפונקציה הקבועה b) ולכן $f(g) = g(a) = b$. נשים לב שאם A ריקה אז מצד שמאל יש איבר אחד, הלא היא הפונקציה הריקה, ואין לאן לשלוח אותה.

3. יהיו $(\mathbb{N}, \leq), ((0,1], \leq)$ שני קס"חים נגדיר על $A = \mathbb{N} \times (0,1]$ את היחס המילוני:

$$(n,x) \leq_l (m,y) \iff n < m \vee (n = m \wedge x \leq y)$$

מצאו, אם קיימים, $\sup B, \inf B$ עבור הקבוצה

$$B = \left\{ \left(4, \frac{1}{n+1}\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

פתרון: $\sup(B) = \left(4, \frac{1}{2}\right)$. הוכחה: נראה ש־ $\left(4, \frac{1}{2}\right)$ הוא חסם מלעיל של B וגם $\left(4, \frac{1}{2}\right) \in B$, וחסם מלעיל של קבוצה ששייך אליה הוא סופרימום. הוא חסם מלעיל כי: לכל $\left(4, \frac{1}{n+1}\right) \in B$ מתקיים $\left(4, \frac{1}{n+1}\right) \leq_l \left(4, \frac{1}{2}\right)$ כיוון ש־ $4 = 4 \wedge \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$.
בנוסף, $\left(4, \frac{1}{2}\right) \in B$ ע"י $n = 1$.
$\inf(B) = (3,1)$. צריך להראות שהוא חסם מלרע, ושהוא הגדול ביותר מבין כל חסמי המלרע. יהי $(4,x) \in B$, אזי כיון ש־ $3 < 4$ נקבל $(3,1) \leq_l (4,x)$. כעת, יהי (n,x) חסם מלרע אז ראשית, $n \leq 3$: כי אם בשלילה $n \geq 4$ אז נסמן $m = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ ונקבל $(4, \frac{1}{m+1}) <_l (n,x)$ כי אם $n > 4$ אז ברור, ואם $n = 4$ אז מהגדרת m נקבל $\frac{1}{m+1} < x$ בסתירה לכך ש־ (n,x) חסם מלרע. אם $n < 3$ ברור ש־ $(n,x) \leq_l (3,1)$ ואם $n = 3$ אז כיון ש־ $x \in (0,1]$ נקבל $x \leq 1$ ולכן $(n,x) \leq_l (3,1)$.

4. תהא A קבוצה, $R \subseteq S$ יחסים מעליה. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם S לא סימטרי אז R לא סימטרי.

הפרכה: $A = \{1,2,3\}, R = \{(1,1)\}, S = \{(1,1),(2,3)\}$. אכן, $R \subseteq S$ אבל S לא סימטרי ואילו R כן סימטרי, אז הגרירה לא מתקיימת.

(ב) אם S אנטי סימטרי אז R אנטי סימטרי.

הוכחה: נתון: S אנטי סימטרי, צ"ל: R אנטי סימטרי. הוכחה: אם $x, y \in A$

כך ש־ R $(x,y)\in R\wedge(y,x)\in R$ צ"ל: $x=y$. כעת, בגלל ש־ $S \subseteq R$ נקבל $S\ni(x,y)\in S\wedge(y,x)$ ונתון S אנטי־סימטרי ולכן $x=y$.

5. תהא A קבוצה עם שני איברים לפחות. נגדיר $\mathbb{O}$ את קבוצת כל יחסי הסדר על A. הוכיחו שבקס"ח $(\mathbb{O},\subseteq)$ אין איבר גדול ביותר.

הערה: בתרגול ראינו שאם R יחס סדר לינארי על A אז הוא איבר מקסימלי ב־ $\mathbb{O}$.

פתרון: **אם** היינו יודעים שיש יחס סדר לינארי R אז כיון שגם R^{-1} לינארי ונקבל שאם בשלילה יש איבר גדול ביותר M אז $M\supseteq R,R^{-1}$ ולכן $M=A\times A$ ואיננו יחס סדר (לא אנטי סימטרי, כאשר ישנם שני איברים). לא שולל, נראה שניתן להוכיח שאכן יש יחס לינארי בעזרת האוסדורף. למעוניינים בהרחבבה, ראו בויקיפדיה "עקרון הסדר הטוב".

דרך 2: ידוע שישנם $a\neq b\in A$ נגדיר יחסים $R=I_A\cup\{(a,b)\},S=I_A\cup\{(b,a)\}$.
כעת נב"ש ש־ M יחס סדר גדול ביותר. לכן $M\supseteq S,R$ ולכן $(a,b)\in M\wedge(b,a)\in M$ ולכן $a=b$ (כי M יחס סדר) בסתירה.