תרגיל בית 10

1. הוכיחו כי קבוצת הפונקציות הפשוטות צפופה ב L^p עבור $p \geq 1$.

2. הראו כי L^∞ הינו מרחב שלם.

3. נניח ו H הינו מרחב הילברט עם בסיס בן מנייה ונניח כי $\|x_n\| \to \|x\|$ כאשר $n \to \infty$ וגם $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ לכל $y \in H$ כאשר $n \to \infty$. הוכיחו כי $\|x_n - x\| \to 0$ כאשר $n \to \infty$.

4. פונקציה מ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ תקרא קמורה אם מתקיים

$$f\left(\lambda x + (1-\lambda) y\right) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

לכל $y > x$ ו $0 \leq \lambda \leq 1$.

i. הוכיחו כי קיים מספר ממשי c כך שמתקיים $f(y) \geq f(x) + c(y-x)$ לכל $y \in \mathbb{R}$.

ii. הוכיחו את אי שוויון יאנסן

$$f\left(\int g d\mu\right) \leq \int f(g) d\mu ,$$

ע"י שימוש בהגדרת הקמירות $f\left(c_1 p + c_2 (1-p)\right) \leq p f(c_1) + (1-p) f(c_2)$ וקירוב של פונקציות פשוטות. כלומר, ללא שימוש בסעיף הקודם כמו שעשינו בתרגול.