

תרגיל בית 6 אינפי 3

1. באילו נקודות במישור הפונקציות הבאות דיפרנציאביליות? הוכח. (שימו לב שהשאלה היא לא רק לגבי $(0, 0)$ אלא לגבי כל הנקודות במישור).

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (\text{א})$$

פתרון. נתחיל בכך שנוכיח כי f דיפרנציאבילית בכל נקודה שבה $(x, y) \neq 0$. קל לראות ש f רציפה בנקודות אלה כי היא מכפלה/חיבור/חילוק של פונקציות רציפות. נחשב את הנגזרות החלקיות ונראה שהן רציפות

$$f'_x(x, y) = \frac{3x^2(x^2 + y^2) - 2x(x^3 + y^4)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2y^2 - 2x^4 - 2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f'_y(x, y) = \frac{4y^3(x^2 + y^2) - 2y(x^3 + y^4)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{4x^2y^3 + 4y^5 - 2x^3y - 2y^5}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{4x^2y^3 + 2y^5 - 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2}$$

ברור ששתי הנגזרות החלקיות רציפות בכל נקודה $(x, y) \neq (0, 0)$ ולכן f דיפרנציאבילית בנקודות אלה. כעת נבדוק דיפרנציאביליות של f ב $(0, 0)$. קל לראות ש f רציפה ב $(0, 0)$ כי

$$\left| \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} \right| + \left| \frac{y^4}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{x^3}{x^2} \right| + \left| \frac{y^4}{y^2} \right| = |x| + |y^2| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

נחשב נגזרות חלקיות

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3}{h^2}}{h} = 1$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^4}{h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h = 0$$

כעת נבדוק דיפרנציאביליות לפי הגדרה

$$f(h_1, h_2) = f(0, 0) + h_1 + \epsilon(h) \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$$

$$\frac{h_1^3 + h_2^4}{h_1^2 + h_2^2} = h_1 + \epsilon(h) \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$$

$$\frac{h_2^4 - h_1 h_2^2}{h_1^2 + h_2^2} = \epsilon(h) \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$$

$$\frac{h_2^4 - h_1 h_2^2}{(h_1^2 + h_2^2)^{\frac{3}{2}}} = \epsilon(h)$$

נבדוק אם ביטוי זה מתכנס ל 0 כאשר $(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)$. נתקדם לאורך הישר

$h_1 = h_2$ ונקבל

$$\frac{h_1^4 - h_1^3}{(2h_1^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \frac{h_1^4 - h_1^3}{|h_1^3|} = \frac{1}{\sqrt{8}} \frac{h_1^4}{|h_1^3|} - \frac{1}{\sqrt{8}} \frac{h_1^3}{|h_1^3|}$$

אמנם מתכנס ל 0 כאשר $h_1 \rightarrow 0$ אבל ל $\frac{1}{\sqrt{8}} \frac{h_1^4}{|h_1^3|}$ אין גבול כאשר

$h_1 \rightarrow 0$ ולכן הביטוי בכלל לא מתכנס ולכן f לא דיפרנציאבילית ב $(0, 0)$.

לסיכום: f דיפרנציאבילית בנקודות $(x, y) \neq (0, 0)$.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (\text{ב})$$

פתרון. שוב, נתחיל בנקודות $(x, y) \neq (0, 0)$. נמצא נגזרות חלקיות

$$f'_x(x, y) = \frac{3x^2(\sqrt{x^2 + y^2}) - \frac{(x^3 - y^2)(2x)}{2\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{3x^4 + 3x^2y^2 - x^4 - xy^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{2x^4 + 3x^2y^2 - xy^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$f'_y(x, y) = \frac{-2y\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{(x^3 - y^2)(2y)}{2\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{-2x^2y - 2y^3 - x^3y + y^3}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{-2x^2y - y^3 - x^3y}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$$

שתי הנגזרות רציפות כאשר $(x, y) \neq (0, 0)$ ולכן f דיפרנציאבילית בנקודות

אלה. נעבור לנקודה $(0, 0)$. קל לראות ש f רציפה מפני ש

$$\left| \frac{x^3 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \left| \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| + \left| \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \left| \frac{x^3}{x} \right| + \left| \frac{y^2}{y} \right| = |x^2| + |y| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

נחשב נגזרות חלקיות ב $(0, 0)$:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3}{|h|}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{|h|} = 0$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h^2}{|h|}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{h}{|h|}$$

הגבול הזה לא קיים. לכן $f'_y(0, 0)$ לא קיימת ולכן f לא דיפרנציאבילית ב

$(0, 0)$. לסיכום f דיפרנציאבילית בכל נקודה $(x, y) \neq (0, 0)$.

$$f(x, y) = \ln(x^4 + y^6 + 1) \quad (\text{ג})$$

פתרון. נחשב נגזרות חלקיות

$$f'_x(x, y) = \frac{4x^3}{x^4 + y^6 + 1}$$

$$f'_y(x, y) = \frac{6y^5}{x^4 + y^6 + 1}$$

שתי הנגזרות קיימות ורציפות בכל \mathbb{R}^2 ולכן f דיפרנציאבילית בכל \mathbb{R}^2 .

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{y^2}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (\text{ד})$$

פתרון. נתחיל בבדיקת הנקודות שבהן $x \neq 0$, נמצא את הנגזרות החלקיות

$$f'_x(x, y) = \sin \frac{y^2}{x} + x \cos \frac{y^2}{x} \cdot \left(-\frac{y^2}{x^2}\right) = \sin \frac{y^2}{x} - \frac{y^2}{x} \cos \frac{y^2}{x}$$

$$f'_y(x, y) = x \cos \frac{y^2}{x} \cdot \left(\frac{2y}{x}\right) = 2y \cos \frac{y^2}{x}$$

שתיהן קיימות ורציפות כאשר $x \neq 0$ ולכן f דיפרנציאבילית בנקודות אלה. כעת נבדוק את הנקודות שבהן $x = 0$. קל לראות ש f רציפה מפני ש

$$\left| x \sin \frac{y^2}{x} \right| \leq |x| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,y_0)} 0$$

נמצא נגזרות חלקיות בנקודות שבהן $x = 0$ כלומר בנקודה $(0, y_0)$

$$f'_y(0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h + y_0) - f(0, y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$f'_x(0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, y_0) - f(0, y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \sin \frac{y_0^2}{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{y_0^2}{h}$$

כאן צריך להפריד למקרים. אם $y_0 \neq 0$ אז אין גבול. אם $y_0 = 0$ אז מתקבל גבול 0. לכן אם $y_0 \neq 0$, f לא דיפרנציאבילית כי אין נגזרת חלקית. בנקודה $(0, 0)$ שתי הנגזרות קיימות ויש לבדוק דיפרנציאביליות לפי הגדרה

$$f(h_1, h_2) = f(0, 0) + \epsilon(h) \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$$

$$h_1 \sin \frac{h_2^2}{h_1} = \epsilon(h) \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$$

$$\epsilon(h) = \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \sin \frac{h_2^2}{h_1}$$

נשים לב ש

$$|\sin x| \leq |x|$$

ולכן

$$\begin{aligned} \left| \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \sin \frac{h_2^2}{h_1} \right| &\leq \left| \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \frac{h_2^2}{h_1} \right| \\ &= \frac{h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq \frac{h_2^2}{\sqrt{h_2^2}} = |h_2| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

ולכן הפונקציה דיפרנציאבילית.

2. נגדיר את $f(x, y) = (xy)^{\frac{2}{3}}$ על כל המישור \mathbb{R}^2 .

(א) מצא את הנגזרת $f'_x(x, y)$ בכל נקודה בה היא קיימת.

פתרון.

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} - (xy)^{\frac{2}{3}}}{h} = \\ &= y^{\frac{2}{3}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}{h} = y^{\frac{2}{3}} (x^{\frac{2}{3}})' \end{aligned}$$

נשים לב שבנקודות בהן $y = 0$ מתקיים כי $f'_x(x, y) = 0$ ובנקודות בהן $y \neq 0$, מתקיים כי $f'_x(x, y) = y^{\frac{2}{3}} (x^{\frac{2}{3}})' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$. לכן לסיכום:

$$f'_x(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} & x \neq 0 \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \\ \text{undefined} & x = 0 \quad y \neq 0 \end{cases}$$

(ב) האם $f'_x(x, y)$ חסומה בסביבת $(0, 0)$?

אם $x \neq 0$ מתקיים כי $f'_x(x, y) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$ שהיא כמובן לא חסומה בסביבת $(0, 0)$.

(ג) הוכח כי $f(x, y)$ דיפרנציאבילית ב $(0, 0)$.

i. ברור כי f רציפה בסביבת $(0, 0)$, וחישבנו כבר $f'_x(0, 0)$, נחשב את $f'_y(0, 0)$:

$$f'_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

כעת נבדוק דיפרנציאביליות לפי הגדרה

$$f(h_1, h_2) = f(0, 0) + \epsilon(h) \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$$

$$(h_1 h_2)^{\frac{2}{3}} = \epsilon(h) \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$$

$$\epsilon(h) = \frac{(h_1 h_2)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

נשתמש באי השוויון $2|x||y| \leq x^2 + y^2$ ונקבל:

$$\left| \frac{(h_1 h_2)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right| \leq \left| \frac{(h_1 h_2)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{2h_1 h_2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} (|h_1| |h_2|)^{\frac{1}{6}} \xrightarrow{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} 0$$

לכן f דיפרנציאבילית ב $(0, 0)$.

(א) תהי פונקציה דיפרנציאביליות בנקודה $(0, 0)$. נגדיר

$$h(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & xy > 0 \\ 0 & xy \leq 0 \end{cases}$$

הוכיחו כי אם מתקיים

$$f(0, 0) = 0, \quad f'_x(0, 0) = 0, \quad f'_y(0, 0) = 0$$

אז $h(x, y)$ דיפרנציאבילית ב $(0, 0)$.

פתרון. f דיפרנציאבילית ב $(0, 0)$ ולכן לפי הגדרה

$$f(t_1, t_2) = f(0, 0) + f'_x(0, 0)t_1 + f'_y(0, 0)t_2 + \epsilon(t)||t||$$

ומתקיים $\epsilon(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ (אני משתמש ב t כי הסימון h תפוס כבר). לפי הנתונים

זה בעצם אומר ש

$$f(t_1, t_2) = \epsilon(t)||t||$$

כלומר

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_1, t_2)}{||t||} = 0$$

נשים לב שלפי הגדרת $h(x, y)$

$$h(0, 0) = 0$$

$$h'_x(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(t, 0) - h(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0$$

$$h'_y(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(0, t) - h(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0$$

נבדוק אם $h(x, y)$ דיפרנציאבילית ב $(0, 0)$ לפי הגדרה

$$h(t_1, t_2) = h(0, 0) + h'_x(0, 0)t_1 + h'_y(0, 0)t_2 + \epsilon(t)||t||$$

$$h(t_1, t_2) = \epsilon(t)||t||$$

$$\epsilon(t) = \frac{h(t_1, t_2)}{||t||}$$

נשים לב שלפי הגדרת h , מתקיים כי $h(t_1, t_2) = f(t_1, t_2)$ או $h(t_1, t_2) = 0$.

לכן בכל מקרה $|h(t_1, t_2)| \leq |f(t_1, t_2)|$ ולכן

$$\left| \frac{h(t_1, t_2)}{||t||} \right| \leq \left| \frac{f(t_1, t_2)}{||t||} \right| \xrightarrow{(t_1, t_2) \rightarrow (0, 0)} 0$$

לכן h דיפרנציאבילית ב $(0, 0)$.

(ב) תהינה $f(x, y)$ ו $g(x, y)$ שתי פונקציות דיפרנציאביליות בנקודה $(0, 0)$. נגדיר

$$h(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & xy > 0 \\ g(x, y) & xy \leq 0 \end{cases}$$

הוכיחו כי אם מתקיים

$$g(0, 0) = f(0, 0), \quad g'_x(0, 0) = f'_x(0, 0), \quad g'_y(0, 0) = f'_y(0, 0)$$

אז $h(x, y)$ דיפרנציאבילית ב $(0, 0)$. (הערה: הטענה ההפוכה לטענה זו גם נכונה, מי שרוצה מוזמן לנסות להוכיח - מומלץ להשתמש בנגזרות מכוונות).

פתרון. נגדיר $T(x, y) = h(x, y) - g(x, y)$ ו $S(x, y) = f(x, y) - g(x, y)$ נשים לב ש S דיפרנציאבילית ב $(0, 0)$ כי היא הפרש של שתי פונקציות שדיפרנציאביליות ב $(0, 0)$ ובנוסף

$$S(0, 0) = 0 \quad S'_x(0, 0) = 0 \quad S'_y(0, 0) = 0$$

כמו כן,

$$T(x, y) = \begin{cases} S(x, y) & xy > 0 \\ 0 & xy \leq 0 \end{cases}$$

לפי סעיף א', T דיפרנציאבילית ב $(0, 0)$. ולכן גם $h(x, y)$ דיפרנציאבילית ב $(0, 0)$ בתור סכום של דיפרנציאביליות ב $(0, 0)$. $(h(x, y) = T(x, y) + g(x, y))$.

4. נגדיר פונקציה

$$f(x, y, z) = xy^2z^3$$

מצאו את הנגזרת הכיוונית של f בנקודה $(3, 2, 1)$ בכיוון $h = (h_1, h_2, h_3)$, שימו לב ש h לא בהכרח וקטור יחידה.

$f(x, y, z) = xy^2z^3$ וברור ש f דיפרנציאבילית כי נגזרותיה החלקיות רציפות. לכן נשתמש בנוסחה שמערכת גרדיאנט. חישוב פשוט מראה ש

$$\nabla f(x, y, z) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$$

ולכן

$$\nabla f(3, 2, 1) = (4, 12, 36)$$

הנגזרת הכיוונית בכיוון h היא

$$\frac{\partial f}{\partial h} = \frac{1}{\|h\|} \nabla f(3, 2, 1) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\|h\|} (4, 12, 36) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \frac{4h_1 + 12h_2 + 36h_3}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}$$

5. תהי פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0, 0)$ ומקיימת כי

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, t) - f(t, -t)}{t} = 1$$

מצאו את $f'_y(0, 0)$.

נשים לב ש

$$1 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, t) - f(t, -t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, t) - f(0, 0) + f(0, 0) - f(t, -t)}{t} =$$
$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, t) - f(0, 0)}{t} - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, -t) - f(0, 0)}{t} = D_{(1,1)}f(0, 0) - D_{(1,-1)}f(0, 0)$$

בגלל ש f דיפרנציאבילית ב $(0, 0)$ אנו יודעים כי

$$D_{(1,1)}f(0, 0) = (f_x(0, 0), f_y(0, 0)) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = f_x(0, 0) + f_y(0, 0)$$

$$D_{(1,-1)}f(0, 0) = (f_x(0, 0), f_y(0, 0)) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = f_x(0, 0) - f_y(0, 0)$$

ולכן

$$1 = D_{(1,1)}f(0, 0) - D_{(1,-1)}f(0, 0) = 2f_y(0, 0)$$

כלומר

$$f_y(0, 0) = \frac{1}{2}$$