פתרון מבחן מועד א' תשע"ו

1. חשבו את האינטגרל

$$\int_{\Gamma} 2x(y^2-2)dx + 2y(x^2+1)dy$$

כאשר Γ היא הגרף של הפונקציה $f(x) = x\sin^3\frac{1}{x}$ בקטע $\left[\frac{1}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$ בכיוון מ־$\left(\frac{1}{\pi}, f\left(\frac{1}{\pi}\right)\right)$ ל־$\left(\frac{2}{\pi}, f\left(\frac{2}{\pi}\right)\right)$.

<u>פתרון:</u> נוכיח שהתבנית

$$\omega = \omega_1(x,y)dx + \omega_2(x,y)dy = 2x(y^2-2)dx + 2y(x^2+1)dy$$

מדוייקת ב־$\mathbb{R}^2$. אכן

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial y}(x,y) = 4xy = \frac{\partial \omega_2}{\partial x}(x,y).$$

התחום $\mathbb{R}^2$ הוא כוכבי ולכן מלמת פואנקרה קיימת ל־ω פונקציית פוטנציאל F.
הפונקציה F מקיימת

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \omega_1(x,y) = 2x(y^2-2)$$

לכן $F(x,y) = x^2(y^2-2) + C(y)$. כמו כן

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2yx^2 + C'(y) = 2y(x^2+1).$$

לכן $C'(y) = 2y$, כלומר $C(y) = y^2 + C_0$. מכאן נקבל ש־

$$F(x,y) = x^2(y^2-2) + y^2 + C_0.$$

כיוון ש־F פונקציית פוטנציאל של ω נובע שאת האינטגרל ניתן לחשב כהפרש הערכים של F בנקודות הסיום וההתחלה של העקומה Γ, כלומר

$$\int_{\Gamma} 2x(y^2-2)dx + 2y(x^2+1)dy = F\left(\frac{2}{\pi}, f\left(\frac{2}{\pi}\right)\right) - F\left(\frac{1}{\pi}, f\left(\frac{1}{\pi}\right)\right)$$

$$= F\left(\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\sin^3\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - F\left(\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\sin^3\pi\right) = F\left(\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right) - F\left(\frac{1}{\pi}, 0\right)$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{4}{\pi^2} - 2\right) + \frac{4}{\pi^2} - \left(-\frac{2}{\pi^2}\right) = \frac{2}{\pi^2}\left(\frac{8}{\pi^2} - 1\right).$$

2. בעזרת משפט גרין חשבו את האינטגרל

$$\int_\Gamma x^2ydx - y^2xdy$$

כאשר

$$\Gamma = \{(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2), x \geq 0, y \geq 0\}$$

בכיוון מ־$(0,0)$ ל־$(a,0)$ (רמז: השתמשו בקאורדינטות קוטביות).

פתרון: קודם נשים לב שהעקומה Γ איננה סגורה ולכן נגדיר את העקומה $\Gamma' = \Gamma \cup l$ כאשר l הוא הקטע המכוון מהנקודה $(a,0)$ לנקודה $(0,0)$. לכן נקבל ש־

$$\int_\Gamma x^2ydx - y^2xdy = \int_{\Gamma'} x^2ydx - y^2xdy - \int_l x^2ydx - y^2xdy.$$

כעת, כיוון ש־$y=0$ על הקטע l נקבל ש־

$$\int_l x^2ydx - y^2xdy = 0.$$

לכן

$$\int_\Gamma x^2ydx - y^2xdy = \int_{\Gamma'} x^2ydx - y^2xdy.$$

כעת נסמן ב־D את הפנים של Γ'. העקומה Γ' מכוונת עם כיוון השעון ולכן כאשר נשתמש בנוסחת גרין ניקח אותה עם סימן המינוס:

$$\int_{\Gamma'} x^2ydx - y^2xdy = -\int\int_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-y^2x\right) - \frac{\partial}{\partial y}x^2y\right)dxdy$$

$$= \int\int_D (x^2+y^2)dxdy.$$

מהגדרת העקומות Γ ו־Γ' נובע שהתחום D נתון כ־

$$D = \{(x^2+y^2)^2 \leq a^2(x^2-y^2) : x \geq 0, y \geq 0\}.$$

כעת נעבור לקאורדינטות קוטביות $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ כדי לקבל ביטוי נוח יותר עבור D ונשים לב שהתנאי $x \geq 0, y \geq 0$ שקול לכך ש־$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. לכן

$$D = \left\{ \left(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta\right)^2 \leq a^2\left(r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta\right) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$
$$= \left\{ r^2 \leq a^2\cos(2\theta) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

כעת התנאי $r^2 = a^2\cos(2\theta)$ גורר ש־$\cos(2\theta) \geq 0$ ולכן עלינו לדרוש ש־$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$. לכן

$$D = \left\{ r \leq a\sqrt{\cos(2\theta)} : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}.$$

מכאן נקבל ש־

$$\int_D (x^2+y^2)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{a\sqrt{\cos(2\theta)}} (r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta) r dr d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{a\sqrt{\cos(2\theta)}} r^3 dr d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^4\Big|_{r=0}^{r=a\sqrt{\cos(2\theta)}} d\theta$$

$$= \frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(2\theta)d\theta = \frac{a^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos(4\theta))d\theta$$

$$= \frac{a^4}{8}\left(\theta + \frac{\sin(4\theta)}{4}\right)\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} = \frac{a^4 \cdot \pi}{32}.$$

3. בעזרת משפט הדיברגנץ חשבו את נפח הגוף החסום ע"י הפרבולואידים $z = 3(x^2+y^2)$ ו־$z = 4 - x^2 - y^2$.

פתרון: קודם נמצא את נקודת הגובה שבה המשטחים נחתכים. ערכי z מתלכדים בשני המשטחים כאשר

$$3(x^2+y^2) = 4 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2+y^2 = 1.$$

כלומר המשטחים נחתכים על המעגל $x^2+y^2=1$ שעליו $z=3$. לכן נגדיר את הפרמטריזציות הבאות עבור המשטחים

$$\Phi_1(x,y)=(x,y,z=3(x^2+y^2)),0\leq z\leq 3,$$

$$\Phi_2(x,y)=(x,y,z=4-x^2-y^2),3\leq z\leq 4.$$

כעת נחשב את הנורמלים של המשטחים בעזרת הפרמטריזציות שהגדרנו

$$n_1=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ 1 & 0 & 6x\\ 0 & 1 & 6y\end{vmatrix}=(-6x,-6y,1),n_2=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ 1 & 0 & -2x\\ 0 & 1 & -2y\end{vmatrix}=(2x,2y,1).$$

כעת נשים לב שעלינו לקחת את סימן המינוס של n_1 כדי לקבל נורמל חיצוני עבור המשטח $z=3(x^2+y^2)$. כמו כן, כיוון שחישבנו את הנורמלים בעזרת נוסחת הדטרמיננטות נובע שאלמנט השטח עבור המשטח $z=3(x^2+y^2)$ הוא $dS=\sqrt{36x^2+36y^2+1}dxdy$ ואלמנט השטח של $z=4-x^2-y^2$ הוא $dS=\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$. כעת נשתמש בנוסחא (שנובעת ממשפט הדיברגנץ)

$$\text{Vol}(V)=\int_S x\cdot N_x dS$$

כאשר N הוא נורמל היחידה החיצוני ($N=n/\|n\|$) כדי לחשב את הנפח בין שני המשטחים. לכן נקבל

$$\text{Vol}(V)=\int_S x\cdot N_x dS=\int_{S\cap\{z\leq 3\}} x\cdot N_x dS+\int_{S\cap\{z\geq 3\}} x\cdot N_x dS$$

$$=\int_{x^2+y^2\leq 1} x\cdot\frac{6x}{\sqrt{1+36x^2+36y^2}}\sqrt{1+36x^2+36y^2}dxdy$$

$$+\int_{x^2+y^2\leq 1} x\cdot\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$$

$$=\int_{x^2+y^2\leq 1} 8x^2 dxdy.$$

כעת נשתמש בקאורדינטות קוטביות $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, dxdy = rdrd\theta$ ונקבל

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 8r^2\cos^2\theta rdrd\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 8r^2\cos^2\theta rdrd\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 4r^3(1+\cos(2\theta))drd\theta.$$

כעת כיוון ש־$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2\theta)d\theta = 0$ נקבל בסוף ש־

$$\text{Vol}(V) = 8\pi\int_0^1 r^3dr = 8\pi\cdot\frac{r^4}{4}\Big|_{r=0}^{r=1} = 2\pi.$$

4. מצאו את שטח הפנים של החלק מהספירה $x^2+y^2+z^2=a^2$ שנמצא בתוך הגליל $x^2+y^2=ax$.

<u>פתרון</u>: נסמן ב־H את בפנים של הגליל $x^2+y^2=ax$ ונשים לב שאת H ניתן לרשום כ־

$$H = \left\{(x,y) : \left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4}\right\}.$$

נסמן ב־S את הספירה $x^2+y^2+z^2=a^2$, לכן עלינו למצוא את השטח של החיתוך $S\cap H$. כיוון שהמשטח $S\cap H$ סימטרי ביחס לציר ה־Z נוכל לחשב את שטח משטח זה כאשר $z\geq 0$ ואת התוצאה נכפיל ב־2. כעת אם נסמן ב־M את החלק העליון של המשטח $S\cap H$ אז נוכל לבצע את הפרמטריזציה הבאה ל־M:

$$M : \Phi(x,y) = \left(x, y, \sqrt{a^2-x^2-y^2}\right), \left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4}$$

כעת נחשב את הנורמל למשטח M

$$n = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \\ 0 & 1 & -\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \end{vmatrix} = \left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, 1\right).$$

מהנוסחא לחישוב הנורמל נובע ש־

$$dS = \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy = \frac{adxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

מכאן נקבל ש־

$$\text{Area}(M) = \int_{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 \le \frac{a^2}{4}} \frac{adxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

כעת נבצע את החלפת המשתנים

$$x = ar\cos\theta, y = ar\sin\theta, dxdy = a^2 rdrd\theta$$

ונקבל

$$\text{Area}(M) = \int_{\left(ar\cos\theta - \frac{a}{2}\right)^2 + a^2r^2 \le \frac{a^2}{4}} \frac{a^3 rdrd\theta}{\sqrt{a^2 - a^2r^2\cos^2\theta - a^2r^2\sin^2\theta}}$$

$$= \int_{r \le \cos\theta} \frac{a^2 rdrd\theta}{\sqrt{1 - r^2}}.$$

כעת נשים לב שהתנאי $0 \le r \le \cos\theta$ גורר ש־$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. לכן

$$\text{Area}(M) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\theta} \frac{a^2 rdrd\theta}{\sqrt{1 - r^2}} = -a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - r^2}\Big|_{r=0}^{r=\cos\theta} d\theta$$

$$= -a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{1 - \cos^2\theta} - 1\right) d\theta = a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - |\sin\theta|)\, d\theta$$

$$= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin\theta) d\theta = 2a^2\, (\theta + \cos\theta)\big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = (\pi - 2)a^2.$$

לכן אם נכפיל את התוצאה שקיבלנו ב־2 נקבל שהשטח המבוקש הוא $2(\pi - 2)a^2$.

5. יהי

$$M = \{z = 9 - x^2 - y^2 : 0 \le z \le 5\}$$

עם נורמל חיצוני ונניח ש־$F = (z-y, z+x, -x-y)$. בעזרת משפט סטוקס חשבו את $\int_M (\nabla \times F) \cdot N dS$.

<u>פתרון</u>: מהגדרת המשטח M נובע ש־

$$\partial M = \{(x,y,z) : x^2+y^2 = 9, z=0\} \cup \{(x,y,z) : x^2+y^2=4, z=5\}.$$

כעת עלינו להגדיר פרמטריזציה ל־∂M שתכוון את ∂M בכיוון החיובי ביחס ל־M. לכן נגדיר

$$\gamma(t) = \begin{cases} (2\cos t, -2\sin t, 5), & -2\pi \le t < 0, \\ (3\cos t, 3\sin t, 0), & 0 \le t < 2\pi. \end{cases}$$

כעת נשתמש במשפט סטוקס:

$$\int_M (\nabla \times F) \cdot N dS = \int_{\partial M} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

$$= \int_{\partial M} (z-y)dx + (z+x)dy - (x+y)dz$$

$$= \int_{-2\pi}^{0} \left((5-(-2\sin t))(2\cos t)' + (5+2\cos t)(-2\sin t)'\right) dt$$

$$+ \int_0^{2\pi} \left((0-3\sin t)(3\cos t)' + (0+3\cos t)(3\sin t)'\right) dt$$

$$= \int_{-2\pi}^{0} \left((5-(-2\sin t))(-2\sin t) + (5+2\cos t)(-2\cos t)\right) dt$$

$$+ \int_0^{2\pi} \left((0-3\sin t)(-3\sin t) + (0+3\cos t)(3\cos t)\right) dt.$$

כיוון שהפונקציות בתוך האינטגרלים מחזוריות 2π ניתן להעביר את האינטגרציה באינטגרל הראשון מ־$[-2\pi, 0]$ ל־$[0, 2\pi]$. לכן נקבל

$$\int_M (\nabla \times F) \cdot N dS = \int_0^{2\pi} \big(-10\sin t - 4\sin^2 t - 10\cos t$$

$$-4\cos^2 t + 9\sin^2 t + 9\cos^2 t\big)\, dt = \int_0^{2\pi} (5 - 10\sin t - 10\cos t) dt$$

$$= (5t + 10\cos t - 10\sin t)\big|_{t=0}^{t=2\pi} = 10\pi.$$

6. נסחו את משפט גרין והוכיחו אותו עבור קבוצות פשוטות.

<u>פתרון</u>: נוסח והוכח בהרצאה.