אלגברה לינארית 1 – תרגול 2

10 ביולי 2020

1 מערכת משוואות לינארית

איבר מוביל/ציר/פותח במטריצה זהו האיבר הראשון בשורה שלו השונה מ־0.

מטריצה תיקרא מדורגת אם מתקיים:

1. כל איבר מוביל נמצא מימין לאיבר המוביל שמעליו.
2. כל האיברים מתחת למוביל הינם 0.
3. שורות אפסי (אם קיימות) נמצאות בתחתית המטריצה.

מטריצה תיקרא מדורגת קנונית אם:

1. היא מדורגת.
2. כל איבר מוביל = 1.
3. מעל כל איבר מוביל כל האיברים הינם 0.

הצורה הכללית של מדורגת:

$$\begin{pmatrix} * & ? & ? & ? & ? \\ & & * & ? & ? \\ & & & & * \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

כאשר $*$ מבטאת משתנה מוביל, $?$ כל דבר, = 0.

הצורה הכללית של מדורגת קנונית:

$$\begin{pmatrix} 1 & ? & 0 & ? & 0 \\ & & 1 & ? & 0 \\ & & & & 1 \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

כעת, בהינתן מערכת נוכל לדעת כמה פתרונות יש למערכת. נסמן את מטריצת המקדמים ב־A, ואת וקטור התשובות ב־ b. נשים אותם במטריצה באופן הבא: $M = \left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right)$. נקרא למשתנה שבעמודה שלו יש איבר מוביל "משתנה תלוי", ולמשתנה שבעמודה שלו אין איבר מוביל "משתנה חופשי". נדרג את המטריצה M, ואז:

1. אם יש שורת סתירה, כלומר שורת אפסים ב־A ואיבר שונה מאפס בשורה זו ב־b, אז אין פתרונות למערכת.
2. אם אין שורת סתירה:
   (א) אם יש משתנה חופשי (לפחות אחד) אז יש אינסוף פתרונות.
   (ב) אם אין משתנה חופשי אז יש פתרון יחיד.

דוגמאות:

פתרו את המערכות הבאות:

1. $\begin{cases} 2x+4y=1 \\ z=1 \\ x+y=1 \end{cases}$. נעבור למטריצות:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - 2R_1 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

נעצור רגע, קיבלנו כעת מטריצה מדורגת (אמנם לא קנונית). אין שורת סתירה, ואין משתנים חופשיים ־ לכן יש פתרון יחיד. נדרג לקנונית ונמצא את הפתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - R_2 \to R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

ולכן הפתרון הוא: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. פתרו: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$. נדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1 \to R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

קיבלנו מטריצה מדורגת קנונית. אין שורת סתירה, יש משתנה חופשי (y), ולכן יש אינסוף פתרונות. נמצא את אוסף הפתרונות: נסמן $y = t$, ונקבל $x = \frac{1}{2} - 2t, z = 1$

ולכן נקבל: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 2t \\ t \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$.

3. פתרו: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$. נדרג:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_3]{R_2 \leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - R_1 - 4R_2 \to R_3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

יש שורת סתירה ולכן אין פתרון.

4. מצאו לאילו ערכי הפרמטר a למערכת: פתרון יחיד / אינסוף פתרונות / אין פתרון.:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 & 2+a \\ a & 3a & 1 & 5 \end{array}\right)$$

פתרון: נדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 & 2+a \\ a & 3a & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 - aR_1 \to R_3]{R_2 - aR_1 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & 2 \\ 0 & a(3-a) & 1-a & 5-a \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - R_2 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|} 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1-a \\ 0 & a(3-a) & 0 \end{array}\right.$$

נשים לב: אם $a \neq 0, 1, 3$ אז אין שורת סתירה ואין משתנים חופשיים ולכן יש פתרון יחיד.

אם $a = 0$ השורה השנייה סתירה ואין פתרון.

אם $a = 1$ השורה השליישית סתירה ואין פתרון.

אם $a = 3$ אז נקבל את המטריצה: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$. נדרג אותה לצורה קנונית:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{2}R_2 \to R_2]{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - R_2 \to R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

נסמן $y = t$ ונקבל: $x = 2 - 3t, z = -1$ ולכן הפתרון הוא: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2-3t \\ t \\ -1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

5. פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{C}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -2+i \\ 1 & 1-2i & 1 & 1-3i \end{array}\right)$$

פתרון: נדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -2+i \\ 1 & 1-2i & 1 & 1-3i \end{array}\right) \xrightarrow[R_3+iR_1\to R_3]{R_2+iR_1\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} i & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2+2i & i & -2+3i \\ 0 & 1 & 1+i & 1-i \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-(2+2i)R_3\to R_2} \left(\begin{array}{ccc} i & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3i \\ 0 & 1 & 1+ \end{array}\right.$$

ולכן נקבל:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-3i \\ 2i \\ -1-2i \end{pmatrix}$$

2 אלגברת מטריצות

עבור מטריצה A עם m שורות ו־n עמודות מעל שדה $\mathbb{F}$, נרשום $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ או $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$. $A_{i,j}$ זה המספר הנמצא בשורה ה־i ובעמודה ה־j של A.

אם $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$ אז נוכל לעשות:

1. חיבור מטריצות:

$$(A+B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$$

2. כפל מטריצה בסקלאר מהשדה:

$$(\alpha A)_{i,j} = \alpha \cdot A_{i,j}$$

כדי להכפיל מטריצות נצטרך שמספר העמודות בשמאלית יהיה שווה למספר השורות בימנית.
כלומר, אם $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, B \in \mathbb{F}^{n\times p}$ אז נוכל להכפיל ביניהן, ולקבל מטריצה $AB \in \mathbb{F}^{m\times p}$
והכפל מוגדר:

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} \cdot B_{k,j} = A_{i,1} \cdot B_{1,j} + A_{i,2} \cdot B_{2,j} + \cdots + A_{i,n} \cdot B_{n,j}$$

דוגמאות:

1. אם $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ מטריצת מקדמים של מערכת לינארית של m משוואות ב־ n נעלמים, $b \in \mathbb{C}^{m\times 1}, x \in \mathbb{C}^{n\times 1}$. אז המערכת היא בעצם הכפל:

$$Ax = b$$

כמו למשל עבור $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ אז המערכת היא"

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \\ -1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

ולכן המערכת $Ax = b$ היא :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases}$$

.2

$$\begin{pmatrix} i & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1-2i & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2-3i \\ 2i \\ -1-2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(-2-3i) + 2 \cdot 2i - 1 - 2i = 2 \\ -2 - 3i + 2 \cdot 2i = -2 + i \\ -2 - 3i + (1-2i)2i - 1 - 2i = 1 - 3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2+i \\ 1-3i \end{pmatrix}$$