

פיסיקה למתמטיקאים

קואורדינטות פולריות

1. לעיתים (למשל בבעיות בעלות סימטריה סיבובית) נח לעבוד בקואורדינטות פולריות r, θ כאשר

$$x = r \cos \theta, \quad (1)$$

$$y = r \sin \theta. \quad (2)$$

הטרנספורמציה בין וקטורי היחידה נתונה ע"י

$$(3) \quad \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix}$$

כאשר המטריצה האורתוגונלית

$$(4) \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

מתארת סיבוב בזווית θ . הטרנספורמציה ההפוכה נתונה על כן ע"י

$$(5) \quad \begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}.$$

מגזירה של $\hat{r}, \hat{\theta}$ ב (5) לפי t נקבל

$$\dot{\hat{r}} = \dot{\theta} \hat{\theta}, \quad (6)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta} \hat{r}, \quad (7)$$

ולכן המהירות נתונה ע"י

$$(8) \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\hat{r}} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta},$$

והתאוצה נתונה ע"י

$$(9) \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{r} \hat{r} + \dot{r} \dot{\hat{r}} + \dot{r} \dot{\theta} \hat{\theta} + r \ddot{\theta} \hat{\theta} + r \dot{\theta} \dot{\hat{\theta}} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{r} + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \hat{\theta}.$$

נשיב לב כי עבור תנועה על מעגל בעל רדיוס R במהירות זוויתית קבועה $\dot{\theta} = \omega$ נקבל את התאוצה הרדיאלית $a_r = -R\omega^2$.

2. מסלולו של חלקיק מתור ע"י הקרדיואידה

$$(10) \quad r(\theta) = 1 - \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

(א) ציירו את המסלול

(ראו תרשים מצורף)

(ב) מצאו את המהירות (גודל וכיוון).

מ (8) נקבל

$$(11) \quad \vec{v} = \dot{\theta} \cos \theta \hat{r} + \dot{\theta}(1 - \sin \theta) \hat{\theta},$$

ו

$$(12) \quad v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 = 2\dot{\theta}^2(1 - \sin \theta).$$

(ג) מהי המהירות המינימלית? עבור אילו זוויות היא מתקבלת?

המהירות מינימלית ($v = 0$) עבור $\theta = \pi/2$.

