פתרון תרגיל בית 9 – מופשטת 1

<u>שאלה 1</u>

נניח ש- $Z(G)=\{1_G\}$. הוכיחו שהמרַכז $C_{Aut(G)}(Inn(G))=\{Id_G\}$, ובפרט גם $Z(Aut(G))=\{Id_G\}$. כלומר, לחבורה חסרת מרכז, גם חבורת האוטומורפיזמים חסרת מרכז.

<u>פתרון</u>

תהי $f\in C_{Aut(G)}(Inn(G))$. נראה ש $f=\{Id_G\}$. כלומר ש $f(x)=x \quad \forall x\in G$.

נניח בשלילה שקיים $x\in G$ כך ש $f(x)\neq x$. $f\in C_{Aut(G)}(Inn(G))$ ולכן עפ"י הגדרת מרכז של תת חבורה נקבל שלכל $a\in G$ מתקיים $f\circ\gamma_a\circ f^{-1}=\gamma_a$ או באופן שקול $f\circ\gamma_a=\gamma_a\circ f$. בפרט $f\circ\gamma_x=\gamma_x\circ f$ ומכאן $\forall g\in G\ (f\circ\gamma_x)(g)=(\gamma_x\circ f)(g)$. מכאן לכל $g\in G$ $f(xgx^{-1})=xf(g)x^{-1}$ או באופן שקול (כי f אוטומורפיזם ובפרט הומומורפיזם) $f(x)f(g)f(x)^{-1}=xf(g)x^{-1}$ לכל $g\in G$. שוב מכיון ש f אוטומורפיזם ובפרט על נקבל ש $f(x)yf(x)^{-1}=xyx^{-1}\ \forall y\in G$. לכן $x^{-1}f(x)y=yx^{-1}f(x)\quad \forall y\in G$. כלומר $x^{-1}f(x)\in Z(G)$. מהנתון $Z(G)=\{1_G\}$ ולכן $x^{-1}f(x)=1_G$. נקבל ש $f(x)=x$ בסתירה להנחה. מכאן $C_{Aut(G)}(Inn(G))=\{Id_G\}$. מתקיים $Inn(G)\subseteq Aut(G)$ ולכן $Z(Aut(G))=C_{Aut(G)}(Aut(G))\subseteq C_{Aut(G)}(Inn(G))=\{Id_G\}$.

לכן $Z(Aut(G))=\{Id_G\}$.

<u>שאלה 2</u>

הוכיחו $Aut(S_3)\cong S_3$.

<u>פתרון</u>

הוכחנו בעבר שלכל $n\geq 3$ מתקיים $Z(S_n)=\{1_{S_n}\}$. מכאן $Inn(S_3)\cong S_3/Z(S_3)\cong S_3$.

לכן כדי להסיק ש $Aut(S_3)\cong S_3$ מ"ל שיש לכל היותר 6 (זהו הסדר של S_3) אוטומורפיזמים (המשמעות היא שכל האוטומורפיזמים הם פנימיים).

ראינו ש- $S_3=\langle(12),(123)\rangle$. אוטומורפיזם נתון φ נקבע עפ"י תמונת היוצרים. איזומורפיזם שומר על סדר איברים וישנם בדיוק שלושה איברים מסדר 2 (אלו החילופים) ב- S_3 ולכן ישנם לכל היותר שלושה ערכים אפשריים ל- $\varphi(12)$.

ישנם בדיוק שני איברים מסדר 3 ולכן ישנן שתי אפשרויות עבור $\varphi(123)$.

בסה"כ נקבל שיש לכל היותר $2\cdot 3=6$ אוטומורפיזמים אפשריים ונקבל הדרוש.

<u>שאלה 3</u>

הוכיחו שלכל שתי חבורות G,H מתקיים $Inn(G)\times Inn(H)\cong Inn(G\times H)$.

<u>פתרון</u>

נמצא איזומורפיזם מפורש. תהי $f:Inn(G)\times Inn(H)\to Inn(G\times H)$ פונקציה המוגדרת ע"י $f(\gamma_g,\gamma_h)=\gamma_{(g,h)}$ לכל $g\in G,\quad h\in H$.

ראשית שימו לב ש- $\gamma_{(g,h)}\in Inn(G\times H)$ מהגדרת $Inn(G\times H)$. כמו כן ברור ש- f על (מדוע?). נותר להוכיח ש- f הומומורפיזם וכן ש- f חח"ע.

f הומומורפיזם: לכל $g_1,g_2\in G,h_1,h_2\in H$ מתקיים-

$$f\left((\gamma_{g_1},\gamma_{h_1})\cdot(\gamma_{g_2},\gamma_{h_2})\right)=f\left(\gamma_{g_1}\circ\gamma_{g_2},\gamma_{h_1}\circ\gamma_{h_2}\right)=f(\gamma_{g_1g_2},\gamma_{h_1h_2})=$$
$$=\gamma_{(g_1g_2,h_1h_2)}=\gamma_{(g_1,h_1)}\circ\gamma_{(g_2,h_2)}=f(\gamma_{g_1},\gamma_{h_1})\circ f(\gamma_{g_2},\gamma_{h_2})$$

הסתמכנו על כך שלכל חבורה K ולכל $k,l\in K$ מתקיים $\gamma_k\circ\gamma_l=\gamma_{kl}$ (בדקו!)

f חח"ע: נראה שהגרעין טריוויאלי. נניח ש $f(\gamma_g,\gamma_h)=\gamma_{(g,h)}=Id_{G\times H}$.

כזכור לכל חבורה K ולכל $k\in K$ מתקיים $\gamma_k=Id_K\Leftrightarrow k\in Z(K)$.

לכן $(g,h)\in Z(G\times H)$. בפרט $\forall x\in G\ (g,h)(x,1_H)=(x,1_H)(g,h)$. מכאן ניתן להסיק ש $g\in Z(G)$ ובאופן דומה מראים ש $h\in Z(H)$. (למעשה תמיד מתקיים $Z(G\times H)=Z(G)\times Z(H)$). מכאן $\gamma_g=Id_G,\gamma_h=Id_H$. זה מוכיח שהגרעין טריוויאלי.

הערה: ניתן לבחור פונקציה $f:Inn(G)\times Inn(H)\to Inn(G\times H)$ המוגדרת ע"י $f(\gamma_g,\gamma_h)=\gamma_g\times\gamma_h$ ולהסתמך על מה שהוכחנו בתרגול. אבל אז על סמך התרגול

בלבד אפשר לומר רק ש- $\gamma_g \times \gamma_h \in Aut(G\times H)$ ויש להסביר מדוע $\gamma_g \times \gamma_h \in Inn(G\times H)$. למעשה ההסבר הוא שמראים ש $\gamma_g \times \gamma_h = \gamma_{(g,h)}$. אחרי שהייתם מוכיחים זאת לא הייתם צריכים להוכיח ש- f הומומורפיזם כי הוכחנו זאת בתרגול.

<u>שאלה 4</u>

א) מצאו את מספר האוטומורפיזמים של $\mathbb{Z}_8$ ושל $\mathbb{Z}_{25}$.

ב) מצאו את מספר האוטומורפיזמים של $\mathbb{Z}_{25}\times\mathbb{Z}_8$.

<u>פתרון</u>

א) $\varphi(8)=4, \varphi(25)=20$

ב) 80

<u>שאלה 5</u>

זהו את החבורה $Aut\left(GL_n(\mathbb{Z}_7)/SL_n(\mathbb{Z}_7)\right)$ (לכל n>0).

<u>פתרון</u>

לכל שדה F , הגרעין של האפימורפיזם $\det : GL_n(F)\to F^*$ הוא $SL_n(F)$. לכן, לפי משפט האיזומורפיזם הראשון נקבל ש- $GL_n(F)/SL_n(F)\cong F^*$. בפרט, $GL_n(\mathbb{Z}_7)/SL_n(\mathbb{Z}_7)\cong \mathbb{Z}_7^*\cong U_7$ וזו חבורה אבלית מסדר 6. כעת, U_7 היא חבורה ציקלית הנוצרת על ידי 3 (בדקו זאת!), ולכן איזומורפית ל-$(\mathbb{Z}_6,+)$. לכן צריך למעשה למצוא את $Aut(\mathbb{Z}_6)$. הוכחנו בעבר ש- $Aut(\mathbb{Z}_6)\cong U_6$.

<u>שאלה 6</u>

תהא $G=U_{10}\times U_{10}$.

א) מהו $Inn(G)$?

ב) מהו $Aut(U_{10})$?

ג) הוכיחו או הפריכו:

(i) המיפוי $f(x)=x^4$ הוא אוטומורפיזם של G.

(ii) המיפוי $f(x)=x^5$ הוא אוטומורפיזם של G.

ד) האם $Aut(U_{10})\times Aut(U_{10})$ איזומורפי ל- $Aut(G)$?

<u>פתרון</u>

א) G אבלית ולכן $Inn(G)=\{id\}$.

ב) $Aut(U_{10})=\mathbb{Z}_2$.

ג) נשים לב שהסדר של G הוא 16 (כי U_{10} היא ציקלית ולכן איזומורפית ל- $\mathbb{Z}_4$).

(i) זהו לא אוטומורפיזם (כי f אינה חח"ע) – למעשה, $\ker(f)=G$ (כי הסדר המקסימלי של כל איבר ב- G הוא 4).

(ii) ראינו שאם H היא חבורה אבלית סופית ו- $\gcd(n,|H|)=1$ אז המיפוי $x\mapsto x^n$ הוא אוטומורפיזם. לכן $x\mapsto x^5$ הוא אוטומורפיזם.

ד) מהאיברים ב- $Aut(U_{10})\times Aut(U_{10})$ ניתן להסיק אוטומורפיזמים ב- $Aut(G)$ (כאשר הם פועלים על כל רכיב במכפלה הקרטזית בנפרד). השאלה היא אם אלו האוטומורפיזמים היחידים ב- $Aut(G)$. התשובה היא לא – הפונקציה $f:G\to G$ המוגדרת על ידי $f(a,b)=(b,a)$ היא אוטומורפיזם ואינה מושרית מפונקציה ב- $Aut(U_{10})\times Aut(U_{10})$. על מנת לראות זאת, אתם יכולים לרשום את כל האיברים בחבורה $Aut(U_{10})\times Aut(U_{10})$ ולראות שאין שם איבר מהצורה $f(a,b)=(b,a)$.

<u>שאלת בונוס</u>

א) תהי G חבורה אבלית סופית. הוכיחו שיש שיכון של $U_{\exp(G)}$ ב- $Aut(G)$.

(את ההגדרה של האקספוננט של חבורה ניתן למצוא בחוברת הקורס, עמוד 68).

ב) תהי G חבורה סופית כלשהי. הוכיחו שאם $Aut(G)$ ציקלית ולא טריוויאלית, אזי היא מסדר זוגי.

<u>פתרון</u>

א) נניח $|G|=n$. נגדיר $f:U_{\exp(G)}\to Aut(G),\quad f(d)\mapsto f_d$ כאשר $f_d:G\to G$ היא הפונקציה $f_d(x)=x^d$. יהי $d\in U_{\exp(G)}$ בשל האבליות של G ברור ש f_d הומומורפיזם. מכיון ש G סופית מ"ל ש f_d חח"ע כדי להסיק ש $f_d\in Aut(G)$.

נראה שהגרעין טריוויאלי. נניח $x^d=1_G$. אזי $o(x)|d$. כמו כן מהגדרת אקספוננט $o(x)|\exp(G)$. כעת, $d\in U_{\exp(G)}$ ומכאן $(d,\exp(G))=1$ ומצד שני

$o(x)|\exp(G), d$. לכן, $o(x)=1$ ו- $x=1_G$. לכן הגרעין טריוויאלי.
קיבלנו שאכן $f_d \in Aut(G)$. קל לראות ש $f(d_1d_2)=f_{d_1d_2}=f_{d_1}\circ f_{d_2}=f(d_1)f(d_2)$
ולכן f הומומורפיזם. כדי להוכיח חח"ע של f מ"ל שעבור $\exp(G)\geq d\neq 1$ כך
ש $d\in U_{\exp(G)}$ מתקיים $f_d\neq Id_G$. אחרת $\forall x\in G\ x^d=x$. מכאן $\forall x\in G\ x^{d-1}=1_G$
ולכן $\exp(G)|d-1$ (מדוע?). בפרט, $\exp(G)\leq d-1$. בסתירה לכך ש $\exp(G)\geq d$.
ב)תחילה נוכיח ש G אבלית. מכיון שתת חבורה של חבורה ציקלית היא
ציקלית נקבל עפ"י הנתון ש $Inn(G)$ ציקלית . מתקיים תמיד $Inn(G)\cong G/Z(G)$.
מכאן $G/Z(G)$ ציקלית ועפ"י תרגיל שהוכחנו בעבר $G/Z(G)$ טריוויאלית. כלומר
$G=Z(G)$ ו G אבלית. בכל חבורה אבלית הפונקציה $f:G\to G,\quad f(x)=x^{-1}$
הוא אוטומורפיזם. קל לראות שהסדר של f הוא 1 או 2. אפשרות ראשונה:
הסדר של f הוא 1 . מכאן $x=x^{-1}$ לכל x . כלומר כל האיברים פרט ליחידה
מסדר 2 (שימו לב ש G אינה טריוויאלית כי אחרת $Aut(G)$ טריוויאלית). לכן G
חבורה אבלית סופית מסדר 2 ולכן $G\cong Z_2^{\,n}$ עבור איזשהו $n\in\mathbb{N}$. אבל
$Aut\left(Z_2^{\,n}\right)\cong GL_n(Z_2)$ שאינה אבלית עבור $n>1$ ולכן גם אינה ציקלית. עבור
$n=1$ נקבל $GL_1(Z_2)=\{0\}$. שהינה חבורה טריוויאלית.
לכן האפשרות הראשונה אינה קיימת למעשה.

אפשרות שניה: הסדר של f הוא 2. מכיון שסדר של איבר מחלק את סדר
החבורה נקבל מייד ש $Aut(G)$ מסדר זוגי.