חשבון אינפיניטסימלי 1 (מדמ"ח) - תרגול 8

12 בדצמבר 2019

טורים

בתרגול הזה נמשיך לדבר על טורים ונראה דרכים נוספות לבחון התכנסות או התבדרות של טורים.

תרגיל: קבעו התכנסות או התבדרות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+4)}$.

פתרון: נשתמש שוב בטכניקה של טור טלסקופי. נשים לב:

$$\frac{1}{(n+2)(n+4)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+4)-(n+2)}{(n+2)(n+4)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+4}\right)$$

לכן:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i+2)(i+4)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i+2} - \frac{1}{i+4}\right) =$$
$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+4}\right)\right] =$$
$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right]$$

מאריתמטיקה של גבולות,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0\right] = \frac{7}{24}$$

לכן הטור מתכנס וסכומו $\frac{7}{24}$.

תרגיל: קבעו התכנסות או התבדרות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

פתרון: נוכיח שהטור מתבדר. נחסום מלמטה את סדרת הסכומים החלקיים:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

מתקיים $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$ ומכלל הסנדוויץ' במובן הרחב, $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$. לכן הטור מתבדר.

משפט: הטור ההנדסי $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ מתכנס עבור $|q| < 1$ ומתבדר עבור $|q| \geq 1$. כשהוא מתכנס, סכומו $\frac{a}{1-q}$.

תרגיל: קבעו התכנסות או התבדרות של $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$.

פתרון: מתקיים:

$$\frac{2^n+3^n}{6^n} = \frac{2^n}{6^n} + \frac{3^n}{6^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

לפי המשפט, הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ו־$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ מתכנסים. לפי אריתמטיקה של טורים,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-1/3} + \frac{1}{1-1/2} = \frac{3}{2} + 2 = 3.5$$

לכן הטור מתכנס וסכומו 3.5.

משפט: יהי $\alpha > 0$. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ מתכנס עבור $\alpha > 1$ ומתבדר עבור $\alpha \in (0,1)$.

תרגיל (סעיף ממבחן): קבעו התכנסות או התבדרות של הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln n}}$$

פתרון: לפי חוקי לוגריתמים, מתקיים:

$$2^{\ln n} = \left(e^{\ln 2}\right)^{\ln n} = e^{\ln 2 \cdot \ln n} = \left(e^{\ln n}\right)^{\ln 2} = n^{\ln 2}$$

כלומר מתקבל הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln 2}}$. $\ln 2 < 1$ כי $2 < e$ ומהמשפט האחרון הטור מתבדר.

משפט ההשוואה הראשון: יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו־$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ שני טורים חיוביים (כלומר, איברי הסדרות $\{a_n\}$ ו־$\{b_n\}$ הם חיוביים). נניח שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \leq b_n$. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

הערות:

- אפשר גם להניח שהאי־שוויון $a_n \leq b_n$ מתקיים רק החל ממקום מסוים (ואפשר גם להניח שהטורים חיוביים רק החל ממקום מסוים).
- ניתן להשתמש גם בצורת ה־contraposition: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר (זה ניסוח שקול).

תרגיל: קבעו התכנסות או התבדרות של הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n^2}\right)}{n^2}$$

פתרון: נשים לב ש־$\frac{\pi}{n^2} \in [0,\pi]$ לכל $n \in \mathbb{N}$. לכן $\sin\left(\frac{\pi}{n^2}\right) \geq 0$ לכל n וזהו טור חיובי. כעת נשתמש בחסם $\sin(x) \leq 1$ ונקבל:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n^2}\right)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

מכיוון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס, נובע ממבחן ההשוואה הראשון שהטור המקורי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n^2}\right)}{n^2}$ מתכנס.

תרגיל: קבעו התכנסות או התבדרות של הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n + 7}{(2-\sin n)n}$$

פתרון: מכיוון ש־$\sin(x), \cos(x) \in [-1,1]$ לכל $x \in \mathbb{R}$, נסיק ש־$\cos(n) + 7$ ו־$2 - \sin n$ שניהם ביטויים חיוביים לכל n. לכן הטור חיובי. כמו כן, נשים לב:

$$\frac{\cos n + 7}{2 - \sin n} \geq \frac{7-1}{2+1} = \frac{6}{3} = 2$$

לכן

$$\frac{\cos n + 7}{(2-\sin n)n} \geq \frac{1}{2n}$$

לכל $n \in \mathbb{N}$. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ מתבדר (כי הוא מתקבל מכפל בקבוע של הטור ההרמוני, שהוא מתבדר) וממשפט ההשוואה הראשון נסיק שגם הטור המקורי מתבדר.

משפט ההשוואה השני: יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו־$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ שני טורים חיוביים . נניח שקיימים $\alpha, \beta > 0$ כך שהחל ממקום מסוים מתקיים

$$\alpha \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \beta$$

אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם ורק אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.

הערות:

- את מסקנת המשפט נהוג לפעמים לנסח כ"שני הטורים מתכנסים או מתבדרים יחדיו".
- בפרט, אם הצלחנו להוכיח ש־$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ קיים וחיובי, אז זה גורר את התנאי של המשפט ולכן גם במקרה זה מתקיימת המסקנה. זה למעשה המקרה העיקרי שבו נשתמש.

תרגיל: קבעו התכנסות או התבדרות של הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$$

פתרון: נזכיר שמתקיים $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. לכן אפשר להשתמש במבחן ההשוואה השני עם $\frac{1}{n}$:

$$\frac{\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\to 1$$

קיבלנו שהמנה מתכנסת לקבוע חיובי. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ וממבחן ההשוואה השני גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ מתבדר.

תרגיל: קבעו התכנסות או התבדרות של הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+3)!}$$

פתרון: נשים לב שמתקיים:

$$\frac{n!}{(n+3)!}=\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

לכן נוכל להשתמש במבחן ההשוואה השני עם $\frac{1}{n^3}$:

$$\frac{\frac{n!}{(n+3)!}}{\frac{1}{n^3}}=\frac{n^3}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n})}\to 1$$

קיבלנו שהמנה מתכנסת לקבוע חיובי. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ וממבחן ההשוואה השני גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+3)!}$ מתכנס.

תרגיל: קבעו התכנסות או התבדרות של הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{9n^4+20n+1}\sqrt[6]{n^5}}{(1+2n)^4}$$

פתרון: אינטואיטיבית, נראה שהשורש הראשון במונה "מתנהג" כמו n^2. השורש השני שווה למעשה ל-$n^{5/6}$ לפי חוקי שורשים. המכנה "מתנהג" כמו n^4. לכן באופן פורמלי מה שנעשה הוא להשתמש במבחן ההשוואה עם $\frac{n^2n^{5/6}}{n^4}=\frac{1}{n^{7/6}}$.

$$\frac{\frac{\sqrt{9n^4+20n+1}\sqrt[6]{n^5}}{(1+2n)^4}}{\frac{1}{n^{7/6}}}=\frac{n^{7/6}\sqrt{9n^4+20n+1}\cdot n^{5/6}}{(1+2n)^4}=\frac{n^2\sqrt{9n^4+20n+1}}{(1+2n)^4}=$$

$$\frac{\frac{n^2}{n^2}\frac{\sqrt{9n^4+20n+1}}{n^2}}{\frac{(1+2n)^4}{n^4}}=\frac{\sqrt{9+\frac{20}{n^3}+\frac{1}{n^4}}}{(2+\frac{1}{n})^4}\to\frac{\sqrt{9+0+0}}{(2+0)^4}=\frac{3}{16}$$

קיבלנו שהמנה מתכנסת לקבוע חיובי. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{7/6}}$ מתכנס (ידוע מההרצאה) וממבחן ההשוואה השני נובע שגם הטור המקורי מתכנס.

תרגיל: יהי $\alpha > 0$. קבעו התכנסות או התבדרות של הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n!}\right)^{\alpha}}$$

פתרון: הרעיון יהיה להשתמש במבחן ההשוואה עם $\frac{1}{n^{\alpha}}$. על מנת לעשות זאת, תחילה נחשב את הגבול $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$. נשים לב:

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$$

נזכיר משפט שראינו בתרגולים קודמים: תהי $\{a_n\}$ סדרה חיובית. אם $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ קיים אז גם הגבול $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ קיים ושווה לו. במקרה שלנו, נגדיר $a_n = \frac{n!}{n^n}$. על פי המשפט, על מנת לחשב את הגבול שרצינו מספיק לחשב את הגבול $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!}{n!} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} =$$
$$(n+1)\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \to e^{-1}$$

סך הכל נובע ש-$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1}$. כעת נראה שמבחן ההשוואה שהצענו אכן עובד:

$$\frac{\frac{1}{n^{\alpha}}}{\frac{1}{\left(\sqrt[n]{n!}\right)^{\alpha}}} = \frac{\left(\sqrt[n]{n!}\right)^{\alpha}}{n^{\alpha}} = \left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)^{\alpha} \to (e^{-1})^{\alpha} = e^{-\alpha}$$

אכן, קיבלנו שהמנה מתכנסת לקבוע חיובי. ממבחן ההשוואה, הטור המקורי מתכנס אם ורק אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ מתכנס, אך אנו יודעים שזה קורה אם ורק אם $\alpha > 1$. לסיכום, הטור המקורי מתכנס עבור $\alpha > 1$ ומתבדר עבור $\alpha \in (0,1)$.

מבחן השורש של קושי: יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי. נסמן $q = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

- אם $q < 1$ הטור מתכנס.
- אם $q > 1$ הטור מתבדר.
- אם $q = 1$ הטור עשוי להתכנס או להתבדר.

מבחן המנה של דלאמבר: יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי. נסמן $q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

- אם $q < 1$ הטור מתכנס.
- אם $q > 1$ הטור מתבדר.
- אם $q = 1$ הטור עשוי להתכנס או להתבדר.

תרגיל: קבעו התכנסות או התבדרות של הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n}$$

פתרון: נשתמש במבחן קושי:

$$\sqrt[n]{\frac{n^5}{2^n}}=\frac{\sqrt[n]{n^5}}{\sqrt[n]{2^n}}=\frac{\sqrt[n]{n}^5}{2}\to\frac{1^5}{2}=\frac{1}{2}<1$$

לכן הטור מתכנס.

הערה: היה אפשר להשתמש כאן גם במבחן דלאמבר. נסו בעצמכם.

תרגיל: קבעו התכנסות או התבדרות של הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)2^n}{n!}$$

פתרון: נשתמש במבחן דלאמבר:

$$\frac{\frac{(n+2)2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(n+1)2^n}{n!}}=\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{2^{n+1}}{2^n}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{n+2}{n+1}\cdot 2\cdot\frac{1}{(n+1)}\to 1\cdot 2\cdot 0=0<1$$

לכן הטור מתכנס.

מבחן העיבוי: נניח ש־$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית ומונוטונית יורדת. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אם ורק אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}2^n a_{2^n}$ מתכנס.

תרגיל: יהי $\alpha>0$. קבעו התכנסות או התבדרות של הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(\ln n\right)^{\alpha}}$$

הערה: נשים לב שאף אחד מהמבחנים שהכרנו עד עכשיו לא יכול להכריע את התכנסות הטור הזה. לא ניתן להשוות אותו לטור מוכר באמצעות אחד ממבחני ההשוואה, ומבחן השורש של קושי נכשל (מקבלים גבול 1). לכן מבחן העיבוי הוא אכן כלי נחוץ.

פתרון: נשים לב שהסדרה $\left\{\frac{1}{n(\ln n)^\alpha}\right\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת חיובית ומונוטונית יורדת (משום ש־$n, \ln n$ מונוטוניות עולות). לכן ניתן להשתמש ממבחן העיבוי, לפיו מספיק להסתכל על התכנסות או התבדרות של הטור הבא:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n\left(\ln 2^n\right)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(n \ln 2\right)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2)^\alpha n^\alpha} =$$
$$\frac{1}{(\ln 2)^\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

$\frac{1}{(\ln 2)^\alpha}$ הוא קבוע חיובי, ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ מתכנס אם ורק אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ מתכנס, וזה קורה אם ורק אם $\alpha > 1$.

תרגיל: קבעו התכנסות או התבדרות של הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

פתרון: נשתמש במבחן העיבוי. מתקבל הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(\ln 2^n)^{\ln 2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(\ln 2 \cdot n)^{\ln 2 \cdot n}}$$

לשם הנוחות נסמן $c = \ln 2$. אז הטור שהתקבל הוא $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(cn)^{cn}}$. נראה שהטור הזה מתכנס לפי מבחן השורש של קושי. מתקיים

$$\sqrt[n]{\frac{2^n}{(cn)^{cn}}} = \frac{2}{(cn)^c} \to 0$$

לכן סך הכל גם הטור המקורי מתכנס.